RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME INVERSE ELLIPTIQUEQUI MODÉLISE LA DÉTECTION ET L'ÉVOLUTION DE LA CORROSION DANS UNE CONDUITE MÉTALLIQUE

DEDICATION

Au terme de ce travail, je remercie le bon dieu tout puissant qui m'a donné la force et la volonté d'achever cette réalisation et comme symbole d'une profonde reconnaissance et gratitude je dédis ce modeste travail : À mes deux plus chers êtres

À la mèmoire de Mon Pére et à Ma Mére

Remerciement

En achevant la rédaction de ce manuscrit, j'ai eu besoin de cet espace pour m'adresser aux personnes qui de près ou de loin, participés à l'aboutissement de ma thèse. C'est cependant, parce que toutes les personnes cités ici ont apporté une contribution que je voulais leur rendre hommage et leur témoigner ma reconnaissance.

Je remercie premièrement mon directeur de recherche, le professeur **SAID Mohamed Saïd**, maître de conférence d'avoir accepté d'encadrer ce mémoire, de son intérêt pour mon travail et de ses commentaires pertinents. Je lui exprime toute ma gratitude.

Je souhaite remercier sincèrement chacun des membres du jury monsieur : **Dr Chacha, Dr Gherfi,** qui ont accepté de participer au jury de soutenance, pour le temps passé à la relecture et pour leurs précieux rapports rédigés.

Je tiens à remercier l'invité d'honneur **Dr Assila,** et je lui exprime toute ma gratitude.

Je remercie tous les enseignants et mes collègues de Magister 2007 et 2009 qui m'ont aidé par leurs conseils et leurs encouragements.

Je tiens à remercier chaleureusement Amel Naame pour son aide scientifique, pour sa disponibilité concernent Scientific WorkPlace.

Tout particulièrement je voudrais aussi remercier Prof **Tidjani**

Zakaria pour avoir partager son expertise de Matlab et contribuer à la partie concernant la programmation numérique. Je lui exprime toute ma gratitude.

Je tiens aussi à remercier avec gratitude Madame Asmaa Abi mouloud, pour avoir accepter de corriger l'orthographe de ma thèse.

Je remercie mon frère Ryad et ma sœur Soumaya pour leurs aides scientifiques, remarques et suggestions, pour leurs confiances en mes compétences à mener à bien mes travaux, pour leurs précieux conseils et aussi leurs encouragements.

Je remercie plus précisément mes biens aimées : **Bouras. Houaria**, **Moumeni. Rebiha** , **Belhacini. Warda**, **Belhacini. Nadjette**, **Ardjani. Amina**, **Warda.Lagrib, Amarni. Asma** pour leurs amitiés, leurs encouragements permanents, leurs bonnes humeurs, leurs efficacités, leurs leçons, et aussi pour leurs affections.

De nombreuses autres personnes que j'apprécie leurs amitiés ; Fouzia, Halima, Zakia, Kalthoum, Fatima, Samia, Saliha. J'espère de ne pas avoir oublié personne et je prie d'avance, ceux et celles qui ne sont pas cités ici, de bien vouloir m'en excuser.

Je tiens aussi à remercie l'aide et le soutien inconditionnel, évoquer de **mon mari**, **ma mère**, mes frères et ma sœur Hadjer bien aimée, que je partage avec eux ma joie et avec toute ma grande

famille : **Lemkeddem**, **Hassini**, **Dib, Allag, Messouter**.

Introduction

La détection de la corrosion à l'intérieur d'un pipeline est l'un des plus importants topiques supérieurs en génie mécanique.

Ce genre de contrôle est très important par exemple en industrie pétrolière car il permet de prévenir des dégradations qui peuvent déboucher sur des incendies difficiles à maîtriser. Dans ce travail présenté, on considère un problème elliptique inverse de Laplace qui modélise la détection et l'évolution de la corrosion dans une conduite métallique, la corrosion se produise dans une partie intérieure inaccessible d'un pipeline, l'objectif est de déterminer les informations sur la corrosion qui se produit sur la surface intérieure, qui est une partie inaccessible, en recueillant des données électrostatique sur la partie de la surface extérieure de la conduite qui est une partie accessible.

Pour l'inspection de pipeline on envoie un courant électrique sur la partie extérieure du pipeline et mesurer ensuite le potentiel résultant sur cette même partie. En générale, le potentiel est solution d'un problème aux limites pour l'équation de Laplace .À partir des mesures, on essaye de localiser la corrosion et de déterminer son étendue.

À ce titre ; ce travail se compose de quatre chapitres, le premier

rassemble l'essentiel de définitions et de propriétés d'espace Sobolev, d'équation aux dérivées partielles, d'analyse de Fourier, d'operateur de Laplace et d'énoncés précis concernant l'effet corrosion dont-on aura besoin tout au long du reste du travail, afin de rafraichir la mémoire mathématiquement, et chimiquement dans le but d'éviter des renvois permanents à d'autres ouvrages.

Le deuxième chapitre sera consacré à l'étude théorique de l'existence et l'unicité d'un problème elliptique. Après qu'on mentionne la position du problème, on examine d'abord l'unicité et l'existence de la solution du problème direct dans l'espace H^1, cela correspond à appliquer le théorème de Lax-Milgram. Ensuite, on note que grâce au lemme de Petree, on obtient la régularité de la solution dans l'espace H^2. Et comme résultat général on a des estimations à priori et la régularité (d'ordre supérieur) dans H^{m+2}, $m \in \mathbb{N}$.

Dans le troisième chapitre, on s'intéresse à la résolution du problème par la méthode de séparation de variables, cette étude méthodique peut déduire explicitement la solution complète de l'équation de Laplace qui vérifie les deux conditions de Dirichlet et de Neumann.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude numérique, on présente la formulation du problème inverse qui est relativement simple : La

section du pipeline est représenté par un domaine Ω de $\mathbb{R}^2$, dont la frontière extérieure est notée Γ_c et la frontière intérieure Γ_i.La partie corrodée de Γ_i inconnue est représenté par la fonction non négative γ. Quand on applique un courant électrique sur Γ_c(en fait il est supporté sur une partie de Γ_c) alors le potentiel électrique à l'intérieur de la section du pipeline est solution du problème aux limites :

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi, & \text{sur } \Gamma_c \\ u_\eta = \psi, & \text{sur } \Gamma_c \end{cases}$$

On considère le problème inverse : détecter γ à partir de la relation $u_\eta + \gamma u = 0$ sur Γ_i.

À travers cela, on met en évidence une technique d'une méthode itérative (B.E.M), l'utilisation de cette technique itérative permet d'établir des résultats de la fonction positive γ. (obtenir des informations d'une série de fonctions γ_i, $i = 1, 2, ...$tel que $\lim_{i \mapsto \infty} \gamma_i = \gamma$).

Un traitement sous logiciel Matlab pour les éléments finis de frontière (B.E.M), est donnée pour la résolution numérique d'un exemple proposé (équation de Laplace avec des conditions aux frontières mixtes), permet de calculer une solution numérique $U^{(i)}$ approchée de la solution exacte du problème bidimensionnel (P_i), cela correspond à calculer dans chaque étape la fonction γ_i, $i = 1, 2, ...$ pour

un test d'arrêt $\|u_{k+1} - u_k\|_{L^2(\Gamma)} \leq \epsilon$, ϵ un petit nombre positif donné.

Notations

Ω : Ouvert de $\mathbb{R}^n$.

$\partial\Omega$: La frontière de l'ouvert Ω.

Γ_i : La frontière dont les données sont inconnues.

Γ_c : La frontiére dont les données sont connues.

$C^k(\overline{\Omega})$: L'espace des fonctions f de classe C^k telle que toutes

les dérivées $\partial^\alpha f, |\alpha| \leq k$ admettent des prolongements continues à $\overline{\Omega}$.

$L^2(\Omega)$: L'espace des fonctions carrés pour la mesure de Lebiegue.

$H^1(\Omega)$: L'espace de Sobolev d'ordre 1.

$H^2(\Omega)$: L'espace de Sobolev d'ordre 2.

$H^m(\Omega)$: L'espace de Sobolev d'ordre m.

$\|.\|_{H^m}$: La norme sur l'espace H^m.

$(.,.)_{H^m}$: Le crochet du produit scalaire dans l'espace H^m.

$u(r,\theta)$: La fonction u aux coordonnées polaires.

$\frac{\partial}{\partial\eta}$: La dérivée par rapport à la normale η où $\frac{\partial}{\partial\eta} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$.

$\triangle$: L'opérateur de Laplace $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

D^α : La dérivée d'ordre α au sens des distributions tel que :

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}.....\partial x_n^{\alpha_n}}, \text{ pour tout } \alpha = (\alpha_1,..,\alpha_n) \in \mathbb{N}^n, |\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

TABLE DES MATIÈRES

LIST OF TABLES xiv

LIST OF FIGURES xvi

1 RAPPEL GÉNÉRAL 1

1.1 Rappel d'analyse fonctionnelle 1

1.1.1 Espace Sobolev 1

1.1.1.1 L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ 2

1.1.1.2 L'espace de Sobolev $H^2(\Omega)$ 2

1.1.1.3 La trace et la formule de Green 3

1.1.2 Problème d'équation au dérivée partielle 5

1.1.2.1 Le problème bien posé 5

1.1.2.2 Type de conditions aux limites 6

1.1.3 La série de Fourier 6

1.1.3.1 Décomposition en séries de Fourier 6

1.1.3.2 Convergence de la série de Fourier 9

1.1.4 L'operateur de Laplace 10

1.1.4.1 Signification du Laplacien 10

1.1.4.2 Propriétés 12

1.2 Rappel de l'effet corrosion 15

1.2.1 Un mot sur la corrosion 15

1.2.2 Le problème inverse de corrosion 19

2 ÉTUDE THÉORIQUE SUR L'EXISTENCE ET L'UNICITÉ 22

2.1 Position du problème 22

2.2 La solution du probléme dans $H^1(\Omega)$ 23

2.2.1 Construction de la formulation variationelle 24

2.2.2 Résolution du problème sous forme variationnelle 26

2.3 La régularité de la solution 33

2.3.1 La solution dans H^2 34

2.3.2 La solution dans H^{2+m} 38

3 ÉTUDE MÉTHODIQUE DE RÉSOLUTION DU PROBLÉME 41

3.1 Séparation des variables 41

3.1.1 Introduction 41

3.1.2 Laplacien en coordonnées polaires 43

3.1.3 Le modèle mathématique 46

3.1.3.1 Fonction à variables séparées 47

3.1.3.2 L'étude de l'équation harmonique 48

3.1.3.3 L'étude de l'équation d'Euler Cauchy 50

3.1.3.4 Détèrmination des cœfficients 51

3.1.4 Exemple 53

3.1.4.1 L'étude de l'EDO en $F(r)$ 54

3.1.4.2 L'étude de l'EDO en $G(\theta)$ 56

3.1.4.3 La solution du problème homogène 56

3.1.4.4 Condition non-homogène (de Neumann) 57

4 ÉTUDE NUMÈRIQUE DE RÉSOLUTION DU PROBLÈME 62

4.1 Formulation du problème inverse 62

4.2 Méthode d'élément de frontière 63

4.3 Description de l'algorithme 64

4.4 Application avec Matlab 68

4.4.1 Résultats et analyses 69

4.4.1.1 L'influence du nombre d'itération n 69

4.4.1.2 L'influence des données aux frontières 72

4.4.1.3 L'influence de la valeur initial f 75

4.4.1.4 L'influence du diamètre de la couronne 79

LISTE DES TABLEAUX

4.1 différentes paramètres des données aux frontiéres 73

4.2 différentes paramètres de la valeur initial f 76

4.3 différentes paramètres du diametre de la courrone 80

TABLE DES FIGURES

1.1 pipeline pour acheminer le pétrole 15

1.2 Pipeline endommagé 16

1.3 La rouille 16

1.4 Inspection par la tomographie par impédance électrique (TIE) . . 18

1.5 Domaine d'étude 21

2.1 Conduite métalique 23

3.1 Section d'une pipeline 47

4.1 2 trajectoires de la fonction gamma 70

4.2 5 trajectoires de la fonction gamma 70

4.3 8 trajectoires de la fonction gamma 71

4.4 4 trajectoires de la fonction gamma 72

4.5 La visualisation graphique de gamma dans 1^{er}cas 73

4.6 La visualisation graphique de gamma dans $2^{éme}$cas 74

4.7 La visualisation graphique de gamma dans $3^{éme}$cas 74

4.8 La visualisation graphique de gamma dans $4^{éme}$cas 75

4.9 Représentation graphique de la fonction gamma 1^{er}cas 76

4.10 Représentation graphique de la fonction gamma $2^{éme}$cas 77

4.11 Représentation graphique de la fonction gamma $3^{éme}$cas 78

4.12 Représentation graphique de la fonction gamma $4^{éme}$cas 78

4.13 Représentation graphique de la fonction gamma 1^{er}cas 80

4.14 Représentation graphique de la fonction gamma $2^{éme}$cas 81

CHAPITRE 1

RAPPEL GÉNÉRAL

1.1 Rappel d'analyse fonctionnelle

1.1.1 Espace Sobolev

Définition1.1 *Pour tout entier* $m \succeq 1$

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \diagup D^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m \right\}$$

tel que $D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} .....\partial x_n^{\alpha_n}}$ *désigne la dérivé d'ordre* α *au sens des distributions avec* $\forall \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, |\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$.

$H^m(\Omega)$ *est appelé espace de Sobolev d'ordre* m.

Par extension, on voit aussi que $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

• On définit **un produit scalaire sur** $H^m(\Omega)$ par :

$$(u, v)_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}, \forall u, v \in H^m(\Omega)$$

tel que $(D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2} = \int_\Omega (D^\alpha u)(D^\alpha v)\, dx$.

• Et **la norme sur** $H^m(\Omega)$ associé étant donné par :

$$\|u\|_{H^m} := \sqrt{(u, u)_{H^m}} = \left[\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega (D^\alpha u)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}, \forall u \in H^m(\Omega).$$

Pour $m = 1, m = 2$ on obtient les espaces suivants :

1.1.1.1 L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$

L'espace de Sobolev d'ordre 1 sur Ω (ouvert de $\mathbb{R}^n$) définit par :

$$\begin{aligned} H^1(\Omega) &= \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i = 1, ..., n \right\} \\ &= \left\{ u \in L^2(\Omega) : \overrightarrow{grad} u \in L^2(\Omega)^n \right\} \end{aligned}$$

Le produit scalaire associé :

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega u(x) v(x) dx + \int_\Omega (\overrightarrow{grad} u(x), \overrightarrow{grad} v(x))_{\mathbb{R}^n} d\Omega$$

la norme associée est notée :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\overrightarrow{grad} u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

1.1.1.2 L'espace de Sobolev $H^2(\Omega)$

L'espace de Sobolev d'ordre 2 sur $\mathbb{R}^n$ est défini par :

$$H^2(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) : \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega), \forall i, j = 1, ..., n \right\}$$

On lui associe le produit scalaire :

$$\begin{aligned}(u,v)_{H^2} &= \int_\Omega u(x)\,v(x)\,dx + \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\,\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\,dx + \\ &\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x)\,\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(x)\,dx\end{aligned}$$

La norme associée est notée :

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|g\overrightarrow{r}\overrightarrow{a}du\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Théorème1.2 *$H^m(\Omega)$ muni du produit scalaire $(.,.)_{H^m}$ est un espace de Hilbert.*

Lemme1.3 (compacité de Rellich) : Si Ω est un domaine de frontière lipschitzienne, l'injection canonique $H^{m+1}(\Omega) \to H^m(\Omega)$ est compacte.

Remarque.*Les espaces de Sobolev sont un outil très important et très adapté à l'étude des équations aux dérivées partielles. En effet, les solutions d'équations aux dérivées partielles, appartiennent plus naturellement à un espace de Sobolev qu'à un espace de fonctions continues dont les dérivées sont comprises dans un sens classique.*

1.1.1.3 La trace et la formule de Green

Définition1.4 *Soit Ω un ouvert borné 1-régulier de $\mathbb{R}^n$*

on définit l'application restriction linéaire et continue Υ_0 *comme suite :*

$$\Upsilon_0 : \begin{cases} H^1(\Omega) & \rightarrow & L^2(\Gamma) \\ u & \mapsto & \Upsilon_0(u) = u\backslash_\Gamma, \end{cases}$$

et la continuité s'ecrit :

$$\exists c \succ 0, \forall u \in H^1(\Omega), \| \Upsilon_0(u)\|_{L^2(\Gamma)} \leq c \|u\|_{H^1(\Omega)},$$

Υ_0 *est appelée "application trace".*

Définition1.5 *Soit* Ω *un ouvert borné 1-régulier de* $\mathbb{R}^n$*. On définit l'application linéaire et continue* Υ_1 *comme suite :*

$$\Upsilon_1 : \begin{cases} H^2(\Omega) & \rightarrow & L^2(\Gamma) \\ u & \mapsto & \Upsilon_1(u) = \frac{\partial u}{\partial \eta}\backslash_\Gamma, \end{cases}$$

tel que $\frac{\partial}{\partial \eta}$ *la dérivé normale extérieure sur la frontière* Γ*.*

Et la continuité s'ecrit :

$$\exists c \succ 0, \forall u \in H^2(\Omega), \| \Upsilon_1(u)\|_{L^2(\Gamma)} \leq c \|u\|_{H^2(\Omega)}$$

est appelée **"application trace"**.

Théorème1.6 *(Formule de Green) Soit* Ω *un ouvert régulier de classe* C^1*. Soit* w *une fonction* $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ *à support borné dans le férmé* $\overline{\Omega}$*. Alors elle vérifie la formule de Green*

$$\int \frac{\partial w}{\partial x_i}(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} w(x)\,\eta_i(x)\,d\Gamma,$$

où η_i est la i-éme composante de la normale extérieure unité de Ω.

Corollaire1.7 *(Formule d'intégration par partie) Soit Ω un ouvert régulier de classe C^1. Soit u et v deux fonctions de $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ à support borné dans le férmé $\overline{\Omega}$. Alors elles vérifient la formule d'intégration par partie*

$$\int_{\Omega} u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\,dx = -\int_{\Omega} v(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\,dx + \int_{\partial\Omega} u(x)\,v(x)\,\eta_i(x)\,d\Gamma$$

Preuve. Il suffit de prendre $w = uv$ dans le théorème 1.6.

Corollaire1.8 *Soit Ω un ouvert régulier de classe C^1. Soit u une fonction de $C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ et v une fonction de $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, toute deux à support borné dans le férmé $\overline{\Omega}$. Alors elles vérifient la formule d'intégration par partie*

$$\int_{\Omega} \Delta u(x)\,v(x)\,dx = -\int_{\Omega} \nabla u(x).\nabla v(x)\,dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}(x)\,v(x)\,d\Gamma$$

où $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)_{1\leq i\leq n}$ est le vecteur gradient de u, et $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \nabla u.\eta$

Preuve. On applique le corollaire 1.7 à v et $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ et on somme en i.

1.1.2 Problème d'équation au dérivée partielle

1.1.2.1 Le problème bien posé

Trouver la solution qui satisfait un système d'équations aux dérivées partielles avec des conditions aux limites (conditions initiales et conditions frontières) forme

un problème bien posé si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

1. La solution existe,

2. La solution doit être unique,

3. La solution dépend continûment par rapport aux conditions aux frontières imposées (stabilité).

1.1.2.2 Type de conditions aux limites

Comme la définition correcte des conditions aux limites est un des éléments essentiels pour obtenir un problème bien posé, on rappelle brièvement les différentes manières d'imposer des conditions aux limites

1. La condition de Dirichlet : $u = f$,

2. La condition de Neumann : $u_\eta = f$,

3. La condition de Robin : $u_\eta + \gamma u = f$,

3. La condition de Cauchy : $u_\eta = f$ et $u = g$.

Dans ces conditions, u_η représente la dérivée normale à la frontière du domaine de calcul.

1.1.3 La série de Fourier

1.1.3.1 Décomposition en séries de Fourier

La résolution d'un problème EDP elliptique (équation de Laplace + conditions aux limites) permet de mettre en évidence le besoin de pouvoir décomposer une

fonction continue comme une superposition de fonctions harmoniques (sinus ou cosinus).

Définition1.9 *(Décomposition en séries de Fourier)*

Soit $f(x)$ une fontion périodique de période $T = \frac{2\pi}{w}$. La décomposition en séries de Fourier de la fonction $f(x)$ est :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n \cos(wnx) + b_n \sin(wnx)$$

Les cœfficents a_0, a_n et b_n sont donnés par les formules d'Euler :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx, \\ a_n &= \frac{2}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(wnx)\,dx, \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(wnx)\,dx. \end{aligned}$$

Théorème1.10 *(Existence de la décompositionen série de Fourier)*

Soit f une fonction périodique de période T. On suppose que f est continue par morceaux et possède une dérivée à droite et à gauche en tout point (pas nécessairement égales). Alors peut être décomposée en séries de Fourier.

Démonstration des formules d'Euler : On démontre les trois formules d'Euler

1. Formule donnant $\mathbf{a}_0$

D'après la définition de la décomposition en séries de Fourier :

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx &= \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[a_0 + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n \cos(wnx) + b_n \sin(wnx)\right] dx \\
&= \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} a_0 dx + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} a_n \cos(wnx)\, dx + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} b_n \sin(wnx)\, dx \\
&= a_0 \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} dx = a_0 T.
\end{aligned}$$

2. Formule donnant $\mathbf{a}_n$

D'après la définition de la décomposition en séries de Fourier :

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos(wnx)\, dx \\
&= \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[a_0 + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n \cos(wnx) + b_n \sin(wnx)\right] \cos(wpx)\, dx, p \in \mathbb{N}^*. \\
&= \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} a_0 \cos(wpx)\, dx + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} a_n \cos(wnx) \cos(wpx)\, dx + \\
&\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} b_n \sin(wnx) \cos(wpx)\, dx
\end{aligned}$$

$$I = \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos(wnx)\, dx$$

On rappelle que :

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

$$\begin{aligned} I &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{a_n}{2} \left[\cos\left(wx\left(n+p\right)\right) + \cos\left(wx\left(n-p\right)\right)\right] dx + \\ & \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{b_n}{2} \left[\sin\left(wx\left(n+p\right)\right) + \sin\left(wx\left(n-p\right)\right)\right] dx \\ I &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{a_n}{2} \left[\cos\left(wx\left(n+p\right)\right) + \cos\left(wx\left(n-p\right)\right)\right] dx \end{aligned}$$

cette dernière intégrale est nulle pour $p \neq n$,

pour $p = n$ on a :

$$\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos\left(wnx\right) dx = \frac{a_n}{2} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} dx = \frac{a_n T}{2}.$$

Remarque. *D'une façon analogue, la formule donnant b_n est*

$$\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin\left(wnx\right) dx = \frac{b_n}{2} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} dx = \frac{b_n T}{2}.$$

1.1.3.2 Convergence de la série de Fourier

On d'étudier la convergence uniforme de la série de Fourier associée à f.

Théorème1.11 *Si f est continue sur$[0, T]$ et C^1par morceaux sur $[0, T]$ alors la série de Fourie assocée à f converge uniformément vers f sur $[0, T]$.*

Remarque. *Toute fonction périodique peut être décomposée en une somme infinie de sinus et cosinus . En conséquence, pour tout phénoméne linéaire en physique , on se contentera d'étudier des sources et des forces sinusoidales .*

1.1.4 L'operateur de Laplace

1.1.4.1 Signification du Laplacien

Il est indispensable de bien dégager une interprétation physique simple (une approche géométrique) pour le Laplacien, autrement dit de se demander quelle est la signification physique de la quantité $\nabla^2\phi$, où ϕ est une grandeur physique quelconque. En particulier, ϕ peut être le potentiel gravifique V où le potentiel de pesanteur U, mais ϕ peut aussi désigner une quantité plus compliquée qu'une simple grandeur scalaire, par exemple un vecteur ou un tenseur. Le Laplacien étant un opérateur scalaire, on peut donc établir sa signification physique dans un système de coordonnées au choix. Pour des raisons de simplicité, nous utilisons ici des coordonnées cartésiennes Ox, Oy, dans lesquelles ∇^2 s'exprime par

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Soit l'equation de Laplace d'ordre deux :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ avec } u = u\left(x, y\right)$$

Soit $\epsilon \succ 0$

$$u(x-\epsilon, y) = u\left(x, y\right) - \epsilon\frac{\partial u}{\partial x}\left(x, y\right) + \frac{1}{2}\epsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(x, y\right) + o\left(\epsilon^3\right) \tag{1.1}$$

$$u(x+\epsilon,y) = u\left(x,y\right) + \epsilon\frac{\partial u}{\partial x}\left(x,y\right) + \frac{1}{2}\epsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(x,y\right) + o\left(\epsilon^3\right) \tag{1.2}$$

Par addition les deux derniéres relations, on resulte le suivant :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(x-\epsilon,y) - 2u\left(x,y\right) + u(x+\epsilon,y)}{\epsilon^2} + o\left(\epsilon\right) \tag{1.3}$$

De même maniére, on peut déduire

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u(x,y-\epsilon) - 2u\left(x,y\right) + u(x,y+\epsilon)}{\epsilon^2} + o\left(\epsilon\right) \tag{1.4}$$

Alors par addition 1.3 et 1.4 on obtient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u(x-\epsilon,y) + u(x+\epsilon,y) + u(x,y-\epsilon) + u(x,y+\epsilon) - 4u\left(x,y\right)}{\epsilon^2} + o\left(\epsilon\right)$$

Si u est une solution de $\Delta u = 0$, alors :

$$u\left(x,y\right) = \frac{1}{4}\left[u(x-\epsilon,y) + u(x+\epsilon,y) + u(x,y-\epsilon) + u(x,y+\epsilon)\right]$$

$\Delta u = 0$ signifie que la valeur de u en un point est égale à la valeur moyenne de u sur les quatre plus proches voisins. En particulier, les solutions de l'équation de Laplace, que l'on appelle des fonctions harmoniques, ont la propriété d'être des fonctions moyennes (où des "fonctions de classe moyenne" dans le jargon mathématique).

Définition1.12 *Soit $u(x,y)$ une fonction définie sur un domaine Ω de $\mathbb{R}^2$, et vérifiant dans ce domaine l'equation de Laplace :*

$$\Delta u = 0$$

Les fonctions qui vérifient cette équation sont dites harmoniques dans Ω.

1.1.4.2 Propriétés

Les équations aux dérivées partielles, notamment peuvent s'écrire en termes d'operateurs sur des espaces de fonctions. Ainsi, certains problèmes issus de la physique, biologie, économie, etc. sont liés à des questions d'inversibilité d'opérateurs, d'un point de vue abstrait, si on désigne par E un espace fonctionnel et T un operateur sur E

L'étude des propriétés dans le cadre des espaces de Banach

Proposition1.13 *Soient $(X, \|.\|_X)$ un espace vectoriel normé sur K*

et $T \in L(E,X)$ bijective. Alors ces deux propriétées sont equivalentes

1) Il existe $c \succ 0$ telle que , pour tout $u \in E, \|Tu\|_X \succeq c\|u\|_E$.

2) $(X, \|.\|_X)$ est un espace de Banach sur K.

Preuve.(1) entraîne (2)

Soit (y_n) une suite de Cauchy dans X, l'opérateur T étant bijectif, il existe une suite $(x_n)_{n\succeq 0}$ dans E telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}, Tx_n = y_n$.

Or d'aprés (1), pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ on a :

$\|x_p - x_q\|_E \leq c^{-1} \|T(x_p - x_q)\|_X \leq c^{-1} \|y_p - y_q\|_X$

Donc $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach E,et par suite, converge vers un élément x de E.

Alors, puisque T est continue, la suite de terme général $y_n = Tx_n$ converge vers $Tx \in X$

on en déduit que X est un espace de Banach.

(2) entraîne (1)

D'aprés le théorème de Banach (2) entraîne á $T^{-1} \in L(X, E)$

Puisque $T^{-1} estcontinue, ona$

$\forall x \in E \quad \|T^{-1}Tx\|_E \leq \|T^{-1}\| \|Tx\|_X$

Donc, pour tout $x \in E, \|Tx\|_X \geq \|T^{-1}\|^{-1} \|x\|_E$.

posons $\|T^{-1}\|^{-1} = c$

alors on obtient

Pour tout $x \in E, \|Tx\|_X \geq c \|x\|_E$.

Corollaire1.14 *Soient* $(Y, \|.\|)$ *un espace de Banach sur* K

et $T \in L(E, Y)$. *Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1- Il existe $c \succ 0$ *telle que, pour tout* $x \in E$, *on a* $\|Tx\|_X \geq c \|x\|_E$.

2- T *est injecctif et* $\mathrm{Im}(T)$ *est fermé dans* Y.

Preuve. On pose $X := \mathrm{Im}(T)$

Supposons qu'il existe $c \succ 0$ telle que pour tout $x \in E$, on a $\|Tx\|_Y \geq c \|x\|_E$.

Alors, T est injectif donc est une bijection de E sur X. D'aprés la proposition si-dessus, on en déduit que $X = \mathrm{Im}(T)$ est un espace de Banach et donc est fermé dans Y.

Supposons T injectif et X fermé dans Y. Alors, T est une bijection de E sur X et X est un espace de Banach. D'aprés la proposition si- dessus, on en déduit qu'il existe $c \succ 0$ telle que , pour tout $x \in E$, on a $\|Tx\|_X \geq c\,\|x\|_E$.

1.2 Rappel de l'effet corrosion

1.2.1 Un mot sur la corrosion

Dans le monde entier, des millions de kilomètres de pipelines sont utilisés pour transporter de l'eau, du gaz et du pétrole sous terre où sous mer (à partir des champs pétroliers situés en pleine mer) ou même à la surface de la terre, depuis leurs sources émettrices jusqu'aux usines de traitement où aux consommateurs.

FIG. 1.1 – pipeline pour acheminer le pétrole

Les tubes sont susceptibles d'être attaqués par un phénomène de corrosion interne et externe, ce phénomène est la cause principale de fuites, de fissurations, et de ruptures des canalisations, se traduisant parfois par des dégâts catastrophiques (dégâts humains, pollution du milieu naturel, frais supplémentaires de réparation, arrêt prolongé du pompage, etc.)

FIG. 1.2 – Pipeline endommagé

Définition1.15 *La corrosion, du Latin "corrodére", signifie ronger, attaquer. C'est une destruction non voulue des métaux sous l'action de milieux corrosifs (agents atmosphériques ou réactifs chimiques). Aprés attaque, les métaux ont tendance à retourner à leur état primitif d'oxyde, sulfure, carbonate ect, plus stable par rapport au milieu considéré et ainsi à subir une détérioration de leurs propriétés.*

FIG. 1.3 – La rouille

En service les matériaux métalliques sont souvent en contact avec un mi-

lieu agressif liquide ou gazeux, donc le phénomène de corrosion est un problème de surface ou plus précisément d'interface entre un métal et un milieu agressif liquide ou gazeux ; le processus de la corrosion entraîne une destruction des matériaux métallique. Ce phénomène a pris de nos jours une importance considérable, étant donné l'utilisation de plus en plus grande des métaux et alliage dans la vie moderne. Les métaux se distinguent entre eux par un ensemble de propriétés avantageuses tels que résistance aux hautes températures, bonne conductibilité électrique et thermique, grand facilité de mise en œuvre, etc. Leurs inconvénients est leur instabilité au contact de l'air et de l'eau ce qui diminue leur résistance à la corrosion et à l'usure, c'est-à-dire leur durabilité. Mais pour mieux remplir leur fonction pendant la durée de la vie prévue on emploie des techniques de protection adéquates contre la corrosion.

L'une de différents processus de la corrosion qu'on s'intéresse dans cette thèse est la corrosion électrochimique(humide) : c'est le phénomène de corrosion le plus important et elle se manifeste lorsque le réactif est un liquide ou lorsqu'il existe une hétérogénéité soit dans le métal où dans le réactif, présentant une dissymétrie de composition. L'existence de ces hétérogénéités détermine la formation d'une pile, alors un courant électrique circule entre anodes et cathodes dans le réactif et les zones qui constituent les anodes sont attaquées (corrodées).

L'idée de la détection de corrosion à partir des mesures frontière surgit à partir de la technique "Tomographie par impédance électrique (TIE)" (voir figure1.4).

Elle est actuellement la réponse la plus économique et la plus adaptée à l'identification et la localisation des corrosions internes dans les tubes.

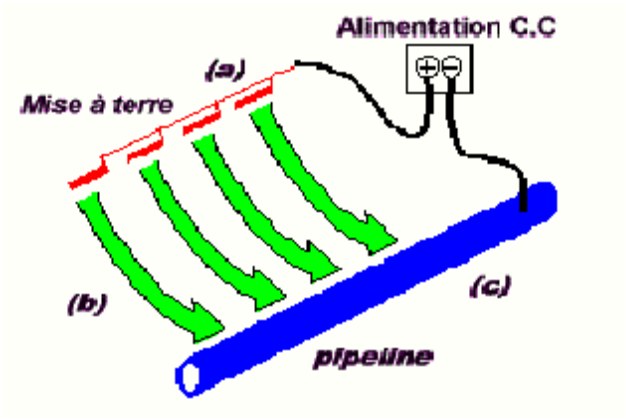

FIG. 1.4 – Inspection par la tomographie par impédance électrique (TIE)

(a) La raille (anode)

(b) Sol environnant

(c) Le pipeline

Pour protéger les pipelines contre la corrosion, on recouvre l'acier d'un revêtement isolant et on les relie à des appareils spéciaux appelés redresseurs pour protection cathodique.

Protection contre la corrosion : De minuscules trous dans le revêtement des pipelines, non détectés lors de leur inspection puisque ceux-ci habituellement enfouis sous terre ou posés sur le plancher marin, mettent l'acier des pipelines en contact avec le sol, l'eau ou l'air humide et le soumettent à la corrosion. Cette réaction électrochimique peut être inhibée en maintenant l'acier des pipelines au

pôle négatif (cathode) par rapport au sol environnant (anode). Pour ce faire, il suffit de brancher le pôle négatif d'une alimentation électrique en courant continu sur le pipeline et le pôle positif au dispositif à anode **(b)** installé dans le sol de sorte que les courants électriques circulent de l'anode au pipeline. Dans ce dispositif, la pipeline est la cathode du circuit, ce qui a donné son nom à la méthode, à savoir la "protection cathodique". Voir [8]

1.2.2 Le problème inverse de corrosion

En science, un problème inverse est une situation dans laquelle à partir des observations expérimentales, on cherche à déterminer la cause d'un phénomène. Les problèmes inverses sont multiples et leurs applications se retrouvent dans de nombreux domaines tels que l'électromagnétisme, la géophysique, l'imagerie médicale, la mécanique des structures,...etc.

Différents modèles de corrosion ont été abordés dans la littérature, voir par exemple les travaux de Kaup et Santosa, Vogelius et Xu, Inglese. Dans ce travail, on va adopter le modèle de l'article de **Jin Cheng, Mourad Choulli, et Xin Yang. Voir** [5]

On considère un problème inverse pour déterminer la corrosion qui se produise dans une partie intérieure inaccessible d'un tuyau à partir des mesures sur la limite extérieure. Le problème est modélisé par l'équation de Laplace avec un terme inconnu γ dans la condition aux limites sur la frontière intérieure. Une méthode

itérative B.E.M. est proposée pour obtenir des solutions approximatives pour ce problème inverse. Les résultats numériques montrent que cette méthode peut être facilement réalisée et en plus elle est très efficace.

Dans le présent travail, on a essayé d'exploiter cette méthode d'approximation constructive des fonctions pour identifier l'endroit de corrosion localisé dans la peau interne d'un tube. Le modèle qu'on a adopté est basé sur les différentes études faites sur le sujet. En effet, Le potentiel électrostatique u vérifie l'équation suivante :

$$\Delta u = 0 \qquad \text{dans } \Omega$$

et donc u est harmonique dans le domaine Ω.

Le problème inverse qu'on considère alors consiste en la détermination des dégâts de la corrosion sur une partie du bord inaccessible du tube, connaissant quelques mesures électriques sur la partie accessible. Pour introduire le problème mathématiquement, le domaine Ω d'étude typique qu'on va considérer dans ce cas est donc une couronne obtenue par une section plane du tube contenant une partie de la frontière intérieure corrodée Figure1.5.

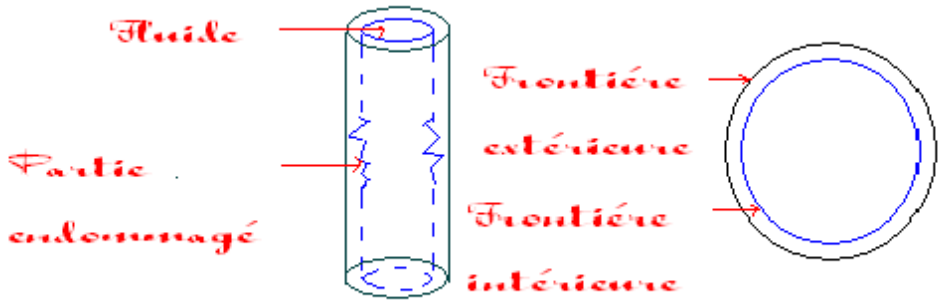

FIG. 1.5 – Domaine d'étude

Le problème inverse considéré, consiste à localiser la corrosion où encore plus précisément à identifier le paramètre de Robin γ, à partir de la relation (condition) suivante :

$$u_\eta + \gamma u = 0 \quad sur\ \Gamma_i$$

tel que u sur Γ_i est la condition de Dirichlet et u_η sur Γ_i est la condition de Neumann.

CHAPITRE 2

ÉTUDE THÉORIQUE SUR L'EXISTENCE ET L'UNICITÉ

2.1 Position du problème

Soit le domaine Ω un corps métallique, ayant une conductivité constante, tel que

$$\Omega = \left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \diagup r_1 \prec \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \prec r_2 \right\}$$

et de frontière $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ tel que

$$\Gamma_1 = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \diagup \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = r_1 \right\}$$
$$\Gamma_2 = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \diagup \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = r_2 \right\}$$

Dans le domaine Ω on considère un champ électrostatique. Le potentiel électrique u satisfait l'équation de Laplace suivante

$$\Delta u = 0 \quad \text{dans } \Omega \tag{2.1}$$

Soit Γ_0 l'ensemble ouvert de la frontière extérieure Γ_2 de Ω qui est une partie accessible ($\Gamma_0 \subset \Gamma_2$).

On note la partie reste de la frontière extérieure de Ω par $\widetilde{\Gamma}_2 = \Gamma_2 \diagdown \Gamma_0$.

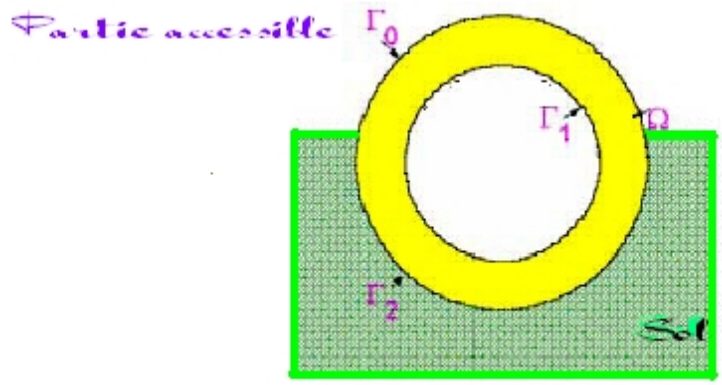

FIG. 2.1 – Conduite métalique

On suppose que la corrosion ne s'est produit que sur la frontière intérieure du domaine Ω c'est-à-dire sur $\Gamma_i = \Gamma_1 \cup \widetilde{\Gamma}_2$

Avec les conditions aux frontières, les données de Dirichlet et Neumann :

$$u(x) = \varphi(x),\ x \in \Gamma_0 \tag{2.2}$$

$$u_\eta(x) = \psi(x),\ x \in \Gamma_i \tag{2.3}$$

où u_η est la dérivée normale extérieure de u sur la frontière ($u_\eta = \frac{\partial u}{\partial \eta}$ avec η est le vecteur normal dirigé vers l'extérieur de Γ).

Et $\phi \in \Upsilon_0 (H^1(\Omega))$, $\psi \in \Upsilon_1 (H^1(\Omega))$.

2.2 La solution du probléme dans $H^1(\Omega)$

On va introduire des outils permettant (au point de vue théorique) d'étudier ce problème ; une formulation différente appelée "formulation variationnelle" couplée

à des résultats d'analyse fonctionnelle permet d'énoncer un théorème d'existence et d'unicité, on doit pour cela changer de point de vue et affaiblir la notion de la solution. Pour mener à bien cette démarche ; le lecteur doit rafraichir sa mémoire au sujet de la théorie abstraite fondée sur les propriétés des espaces de Hilbert (voir[4],[9]), on aura aussi besoin de donner quelques résultats essentiels avant de mettre en évidence le théorème de **Lax-Milgram.** Ainsi, on propose d'adopter une approche variationnelle pour construire une solution par les étapes suivantes :

2.2.1 Construction de la formulation variationelle

On multiplie l'équation (2.1) par une fonction test v, on intègre sur Ω et on intègre par parties(l'utilisation de la corollaire 9) ; cela donne :

Le problème variationnel :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que } u_{\backslash\Gamma_0} = \varphi \text{ et} \\ \displaystyle\int_\Omega \overrightarrow{\text{grad}}u.\overrightarrow{\text{grad}}v dx = \int_{\Gamma_i} \psi v d\Gamma, \ \forall v \in H^1(\Omega), \ v_{\backslash\Gamma_0} = 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

La condition $u_{\backslash\Gamma_0} = \varphi$ est une condition essentielle, alors que la condition $\frac{\partial u}{\partial \eta}\backslash_{\Gamma_i} = \psi$ est une condition naturelle (on va la retrouver par intégration par parties).

On note $H^1_{\Gamma_0}(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega) : v_{\backslash\Gamma_0} = 0 \right\}$

$H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \equiv H^1_0(\Omega)$ sous espace de $H^1(\Omega)$ constitué des fonctions qui s'annulent sur le bord Γ_0,

Alors le problème se reformule de la manière suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in \varphi + H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \text{ tel que et } \forall v \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \\ \int\limits_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad}} u . \overrightarrow{\text{grad}} v dx = \int\limits_{\Gamma_i} \psi v d\Gamma. \end{cases} \tag{2.5}$$

Remarque. *La formulation variationnelle est aussi parfois appeée formulation faible du problème aux limites* $(2.1) - (2.3)$.

En mécanique, la formulation variationnelle (2.4) *est connue sous le nom de "Principe des travaux virtuels".*

En physique, on parle aussi d'équation de bilan ou de formule de réciprocité. Lorsqu'on prend $v = u$ *dans* (2.4), *on obtient ce qu'il est convenu d'appeler une égalité d'énergie.*

Proposition2.1*Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *borné dans au moins une direction de l'espace.*

Alors la semi-norme dans H^1_0 :

$$|v|_{H^1_0} = \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme sur H^1_0 *équivalente à la norme usuelle induite par celle de* H^1.

Preuve. Soit $v \in H^1_0$. La première inégalité

$$|v|_{H^1_0} \leq \|v\|_{H^1} = \left(\int\limits_{\Omega} \left(|v|^2 + |\nabla v|^2 \right) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

est évidente. D'autre part, l'inégalité de Poincaré suivante :

$$\exists C \succ 0, \int\limits_{\Omega} |v|^2 dx \leq \int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 dx$$

pour toute fonction $v \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ qui s'annule sur le bord $\partial\Omega$, conduit à

$$\|v\|^2_{H^1} \leq (C+1)\int_\Omega |\nabla v|^2\, dx = (C+1)\,|v|^2_{H_0^1},$$

ce qui prouve que $|v|_{H_0^1}$ est norme équivalente à $\|v\|_{H^1}$.

Remarque. $\left(H^1_{\Gamma_0}, \|.\|_{H^1}\right)$ *est un espace de Hilbert : il est triviablement stable, et il est fermé car l'aplication :*

$r\backslash_{\Gamma_0} \circ \Upsilon_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma_0)$ *est continue (on note* $r\backslash_{\Gamma_0} : L^2(\Gamma) \to L^2(\Gamma_0)$ *l'aplication* $u \to u\backslash_{\Gamma_0}$ *restriction à* Γ_0, *cette application étant trivialement linéaire contenue).*

2.2.2 Résolution du problème sous forme variationnelle

Cadre abstrait :

On invoque ici une théorie abstaite pour obtenir l'existence et l'unicité de la solution d'une formulation variationnelle dans un espace de Hilbert. On note V un espace de Hilbert et on considére une formulation variationnelle du type :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } a(u,v) = L(v) \text{ pour toute fonction } v \in V. \tag{2.6}$$

Les hypothèses sur a et L sont :

1. $L(.)$ est une forme linéaire continue sur V, c'est-à-dire que $v \to L(v)$ est linéaire et il existe $c \succ 0$ tel que

$$|L(v)| \leq c\,\|v\| \text{ pour tout } v \in V;$$

2. $a(.,.)$ est une forme bilinéaire sur V, c'est-à-dire que $u \to a(u,v)$ est une forme linéaire pour tout $v \in V$, et $v \to a(u,v)$ est une forme linéaire pour tout $u \in V$.

3. $a(.,.)$ est continue, c'est-à-dire qu'il existe $M \succ 0$ tel que

$$|a(u,v)| \leq M \|u\| \|v\| \text{ pour tout } u, v \in V;$$

4. $a(.,.)$ est **coercive** (ou elliptique), c'est-à-dire qu'il existe $\alpha \succ 0$ tel que

$$a(u,u) \succeq \alpha \|u\|^2 pourtoutu \in V.$$

Remarque. *Toutes les hypothèses ci-dessus sont nécessaires pour pouvoir résoudre (2.6). En particulier, la coercivité de* $a(.,.)$ *est essentielle.*

Théorème2.2 (Lax-Milgram) *Soit un espace de Hilbert,* $L(v)$ *une forme linéaire continue sur* V, $a(.,.)$ *une forme bilinéaire continue coercive sur* V. *Alors la formulation variationnelle* 2.6 *admet une unique solution. De plus cette solution dépend continûment de la forme linéaire* L.

Preuve. La démonstration du théorème est fournie dans [1](page74)

Remarque. *Le théorème de Lax-Milgram donne des conditions suffisantes pour que le problème soit bien posé, pas des conditions nécessaire. Si les hypothèses de ce théorème ne sont pas satisfaites, on ne peut donc pas en déduire que le problème est mal posé. Toute fois, dans le cas où les hypothèses autres que la coercivité de* a *sont satisfaites, on a le résultat suivant : Si* a *est symétrique et*

positive ($a(u,u) \succeq 0, \forall u \in V$), *alors* a *non coercive implique que le problème est mal posé.*

La vérification des hypothèses :

Avant de faire la vérification, on a besoin de ces théorèmes pour les démonstrations qui suivent ci dessous :

Théorème2.3 (**Inégalité de Poincaré**)

Soit Ω *un ouvert borné et lipschitzien de* $\mathbb{R}^n$. *Il existe une constante* $C \succ 0$ *telle que*

$$\|u\|_{L^2} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}, \ \forall u \in \ H_0^1(\Omega)$$

Remarque. *Cette inégalité montre que la norme* L^2 *de* u *est controler par la norme* L^2 *de ses dérivées, ceci n'étant bien sur valable ici que pour les fonctions nulles au bord.*

Théorème2.4 (**Inégalité de Hölder**)

Soit E *un espace mesuré, soient* $1 \leq p, q \leq \infty$ *avec* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *soit* f *une fonction de* $L^p(E)$ *et* g *une fonction de* $L^q(E)$ *dans . Alors* fg *appartient à* $L^1(E)$ *et*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

- La premiére vérification dans le cas $\varphi = 0$:

on vérifie les hypothéses du théorème de Lax-Milgram :

1) $(H_0^1, \|.\|_{H^1})$ est un espace de Hilbert.

2) $a(.,.)$ est bilinéaire et $L(.)$ est linéaire, facile à vérifier car $\int$ et $\overrightarrow{grad}$ sont linéaire.

3) $a(.,.)$ est continue dans H_0^1 :

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &= \left| \int_\Omega \overrightarrow{\text{grad}} u . \overrightarrow{\text{grad}} v dx \right| \\
&\leq \int_\Omega |\nabla u| . |\nabla v| \, dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|\nabla u\|_{L^2} . \|\nabla v\|_{L^2} \\
&\leq \|u\|_{H_0^1} . \|v\|_{H_0^1}
\end{aligned}$$

4) $a(.,.)$ est coercive dans H_0^1, car pour tout $u \in H_0^1$:

$$\exists \alpha \succ 0 : a(u,u) \succeq \alpha \|u\|_{H_0^1}^2$$

$$a(u,u) = \int_\Omega \nabla u . \nabla u dx = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = \|u\|_{H_0^1}^2$$

Alors une constante de H_0^1-coercive est $\alpha = 1$.

5) La forme linéaire $L(.)$ est continue dans H_0^1 car pour tout $v \in H_0^1$:

$$\begin{aligned}
|L(v)| &= \left| \int_{\Gamma_i} \psi v d\Gamma \right|, \\
&\leq \int_{\Gamma_i} |\psi| \, |v| \, d\Gamma, \\
&\leq \|\psi\|_{L^2} \|v\|_{L^2}, \\
&\leq c \|\psi\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2}, \\
&\leq c \|\psi\|_{L^2} \|v\|_{H_0^1}, \\
&\leq \beta \|v\|_{H_0^1}.
\end{aligned}$$

tel que $\beta = c \|\psi\|_{L^2}$

D'aprés **Lax-Milgram** le probléme variationnel (2.6) admet une unique solution et cette dernière dépend continûment de la forme linéaire L, donc le probléme variationnel (2.4) est donc bien posé dans H^1.

- La deuxiéme vérification dans le cas $\varphi \neq 0$:

Le problème variationnel (2.5) , dont u est chercher dans un espace affine (le translaté de l'espace vectoriel $H_0^1(\Omega)$ par φ), on ne peut pas appliquer directement le théorème de Lax-Milgam (il faut un espace vectoriel). Alors on va se ramener à un espace.

Rappel : un espace affine n'est pas stable par addition : si V est un espace vectoriel et si u_1 et u_2 sont dans un espace affine $\varphi + V$ associé, on n'a pas $u_1 + u_2$ dans $\varphi + V$ (mais dans $2\varphi + V$. Un espace affine n'est pas un espace vectoriel.

Définition2.4 *Pour $\varphi \in \Upsilon_0(H^1(\Omega))$ donné, on appelle relèvement $r \in H^1(\Omega)$ de la fonction φ : un antécédent de φ par Υ_0, c'est-à-dire un élément*

$r \in H^1(\Omega)$ *qui vérifie* $\Upsilon_0(r) = \varphi$.

Un tel antécédent existe par définition de l'espace image $\Upsilon_0(H^1(\Omega))$, mais n'a aucune raison d'être unique.

Notation. Si $r \in H^1(\Omega)$, on note $r+ H_0^1(\Omega)$ l'espace affine :

$r+ H_0^1(\Omega) = \{w \in H^1(\Omega) \text{ tq } \exists v \in H_0^1(\Omega), w = v + r\}$

C'est un espace affine associé à l'espace vectoriel $H_0^1(\Omega)$ (l'espace translaté de r) et si $\varphi \in \Upsilon_0(H_0^1(\Omega))$, alors pour un relèvement r donné de (2.5), on note :

$$\varphi + H_0^1(\Omega) = r + H_0^1(\Omega)$$

car il est immédiat que cet espace est indépendant du relèvement r de φ choisi : si r_1 et r_2 sont deux relèvements de φ,

i.e. si $\Upsilon_0(v_1) = \varphi = \Upsilon_0(v_2)$, alors $r_1 + H_0^1(\Omega) = r_2 + H_0^1(\Omega)$.

En effet, si $w = r_1+v_1 \in r_1+H_0^1(\Omega)$, alors $w = r_2+v_2$ avec $v_2 = (r_1 - r_2)+v_1$,

et on a $\Upsilon_0(v_2) = 0$, i.e. $v_2 \in H_0^1(\Omega)$.

On ramène (par translation) le problème (2.5) posé dans l'espace affine $\varphi + H_0^1(\Omega)$ dans l'espace vectoriel $H_0^1(\Omega)$ associé (pour garder le caractère linéaire du problème), i.e. on translate u : puisque $\varphi \in \Upsilon_0(H^1(\Omega))$ il existe (au moins) un relèvement $r_\varphi \in H^1(\Omega)$ de φ; on s'en fixe un. Et on considère le problème à la variable $u_0 = u - r_\varphi \in H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_0 \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que pour tout } v \in H_0^1(\Omega) \\ \int\limits_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad}} u_0 . \overrightarrow{\text{grad}} v dx = -\int\limits_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad}} r_\varphi . \overrightarrow{\text{grad}} v dx + \int\limits_{\Gamma_i} \psi v d\Gamma. \end{cases}$$

Cela ramène à appliquer Lax-Milgram au problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_0 \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ a(u_0, v) = L_\varphi(v) \end{cases} \tag{2.7}$$

Avec la même forme $a(.,.)$ que le problème du premier cas$(\varphi = 0)$. Cette forme est donc bilinéaire continue et 1-coercive sur $H_0^1(\Omega)$.

Et la forme $L_\varphi(v)$ est maintenant définie sur $H_0^1(\Omega)$ par :

$$L_\varphi(v) = -\int\limits_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad}} r_\varphi . \overrightarrow{\text{grad}} v dx + \int\limits_{\Gamma_i} \psi v d\Gamma$$

cette forme est trivialement linéaire et vérifie, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ par :

$$\begin{aligned} |L_\varphi(v)| &= \left| -\int\limits_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad}} r_\varphi . \overrightarrow{\text{grad}} v dx + \int\limits_{\Gamma_i} \psi v d\Gamma \right| \\ &\leq \int\limits_{\Omega} |\nabla r_\varphi| . |\nabla v| dx + \int\limits_{\Gamma_i} |\psi| |v| d\Gamma, \\ &\leq \|\nabla r_\varphi\|_{L^2} . \|\nabla v\|_{L^2} + \|\psi\|_{L^2} \|v\|_{L^2}, \\ &\leq \|r_\varphi\|_{H_0^1} . \|v\|_{H_0^1} + c \|\psi\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2}, \\ &\leq \|r_\varphi\|_{H_0^1} . \|v\|_{H_0^1} + c \|\psi\|_{L^2} \|v\|_{H_0^1}, \\ &\leq \left(\|r_\varphi\|_{H_0^1} + c \|\psi\|_{L^2} \right) \|v\|_{H_0^1}, \\ &\leq \lambda \|v\|_{H_0^1}. \end{aligned}$$

tel que $\lambda = \|r_\varphi\|_{H_0^1} + c \|\psi\|_{L^2}$.

Grâce à l'inégalité de Poincaré car Ω est borné et $v \in H_0^1(\Omega)$. D'où $L_\varphi(.)$ est continue sur $H_0^1(\Omega)$ avec :

$$\|L_\varphi\| \leq \|r_\varphi\|_{H_0^1} + c\,\|\psi\|_{L^2}$$

Le problème est donc bien posé : il existe un unique $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ vérifiant (2.7) et u_0 dépend continûment de L_φ :

$$\|u_0\|_{H_0^1} \leq \|L_\varphi\|$$

(constante de coercivité égale à 1.)

Remarque. *La solution $u = u_0 + r_\varphi$ ne dépend pas du relèvement r_φ choisi.*

2.3 La régularité de la solution

Il existe de nombreux critères pour évaluer la régularité d'une fonction. Le critère le plus élémentaire est celui de la continuité. Une notion plus forte de régularité est la différentiabilité. En effet, les fonctions différentiables sont également continues. Enfin, un critère encore plus fort de régularité est la continuité des dérivées partielles (de telles fonctions sont dites de classe C^1 Classe de régularité). Les fonctions différentiables sont importantes dans beaucoup de domaines, en particulier pour les équations aux dérivées partielles (cas de plusieurs variables). Cependant, au cours du XXe siècle, les mathématiciens se sont rendu compte que l'espace C^1 (ou C^2, etc.) n'était pas le cadre approprié pour étudier les solu-

tions des équations aux dérivées partielles. Les espaces de Sobolev se sont imposés comme l'outil moderne fournissant le cadre adéquat pour la recherche de solutions d'équations aux dérivées partielles.

2.3.1 La solution dans H^2

Le théorème 2.2 prouve que le problème variationnel (2.4) est donc bien posé, il assure l'existence et l'unicité de la solution, qui dépend continûment des données mixtes aux frontières, dans $H^1(\Omega)$ .Il reste à vérifier que cette solution est en fait dans $H^2(\Omega)$: on aura alors bien équivalence du problème variationnel (2.4) et le problème elliptique $(2.1)-(2.3)$, donc ce dérnier sera bien posé.

Un résultat de régularité indique que lorsque $\Delta u = f \in L^2(\Omega)$ alors u est en fait est dans $H^2(\Omega)$,

Pour étudier l'existence de solution dans l'espace H^2 du problème (2.4), on va montrer que l'image de l'operateur Laplacien Δ est fermé dans cet espace, et on va montrer aussi que le noyau du problème est de dimension finie et pour cela on utilise une inégalité à priori qui découle de lemme du Peetre.

Lemme2.5*(de Peetre) : Soient E_1, E_2, E_3 trois espaces de Banach réflexifs tel que E_1 s'injecte dans E_3, et cette injection est compacte ,et soit L un operateur linéaire et continu de E_1 dans E_2. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *L'image de L est fermée dans E_3 et le noyau de L est de dimension finie.*
2. *Il existe une constante $k \succ 0$ tel que :*$\|u\|_{E_1} \leq k\left(\|Lu\|_{E_3} + \|u\|_{E_2}\right)$.

Pour une démonstration bien détaillé, voir [2].

Vérification des hypothèses :

Appliquant ce lemme , on prend $E_1 = H^2$, E_2=H^1, $E_3 = L^2$ trois espaces de Bannach , réflexifs et H^2 s'injecte dans L^2 et cette injection est compacte (d'après le lemme 3), de plus l'operateur Laplacien Δ linéaire et continue de : $H^1 \longrightarrow H^2$.

On déduit que pour obtenir l'inégalitè à priori suivante :

$$\exists k \succ 0 \quad \|u\|_{H^2} \leq k\left(\|\Delta u\|_{L^2} + \|u\|_{H^1}\right)$$

qui assure l'existence et l'unicité de la solution dans H^2, on fait l'étude de :

• La dimension de noyau de l'operateur Δ est fini (unicité)

• L'image de l'operateur Δest fermé dans L^2 (existence)

La dimension du noyau de l'operateur Δ est fini :

1) Cas de la condition de Dirichlet

Les éléments du noyau du problème (2.1) sont solutions du problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, \text{dans } \Omega \\ \quad u = 0, \text{ sur } \Gamma \end{cases} \tag{2.8}$$

Il suffit de remarquer que comme $-\Delta u = 0$ et on a $\langle -\Delta u, u\rangle_{L^2} = 0$.

d'autre part on a :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

donc :

$$\left\langle -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, u \right\rangle_{L^2} = -\left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u \right\rangle_{L^2} - \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, u \right\rangle_{L^2} = 0$$

cela implique :

$$\Rightarrow \quad \left\|\tfrac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L^2}^2 + \left\|\tfrac{\partial u}{\partial y}\right\|_{L^2}^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left\|\tfrac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L^2}^2 = \left\|\tfrac{\partial u}{\partial y}\right\|_{L^2}^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tfrac{\partial u}{\partial x} = \tfrac{\partial u}{\partial y} = 0$$

On déduit que : u est constante et comme $u = 0$ sur Γ , donc $u = 0$ dans $H^1(\Gamma)$ et donc $u = 0$ dans $H^2(\Gamma)$.

2) Cas de la condition de mixte (Dirichlet-Neumann) :

Les éléments du noyau de problème (2.1) avec la condition mixte sont solutions du problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & \text{dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{2.9}$$

Pour $u \in H^2$, on calcule le produit scalaire $\langle -\Delta u, u \rangle_{L^2} = 0$

d'autre part ,on a :

$$\begin{aligned} \langle -\Delta u, u \rangle_{L^2} &= -\left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}.\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}.\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}, u \right\rangle \\ &= -\left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, u \right\rangle - \left\langle \frac{1}{r}.\frac{\partial u}{\partial r}, u \right\rangle - \left\langle \frac{1}{r^2}.\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}, u \right\rangle \\ &= \left\| \frac{\partial u}{\partial r} \right\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{1}{r}.\frac{\partial u}{\partial \theta} \right\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

D'ou

$$\langle -\Delta u, u\rangle_{L^2} = \left\|\frac{\partial u}{\partial r}\right\|_{L^2}^2 + \left\|\frac{1}{r}.\frac{\partial u}{\partial \theta}\right\|_{L^2}^2 = 0$$

Cela implique :

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}.\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$$

D'autre part on a :

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{r}.\frac{\partial}{\partial \theta}$$

Donc :

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

On déduit que u est constante .

On remarque que les constantes calculées sont les solutions de problème(2.9) et alors la dimension du noyau de ce problème est au moins de dimension un.

L'image de l'operateur Δ est férmé dans L^2 :

En analyse, Les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels. Plus précisément, un espace de Sobolev est un espace vectoriel de fonctions muni de la norme obtenue par la combinaison de la norme L^p de la fonction elle-même ainsi que de ses dérivées jusqu'à un certain ordre. Les dérivées sont comprises dans un sens faible, au sens des distributions afin de rendre l'espace complet. Les espaces de

Sobolev sont donc des espaces de Banach. Intuitivement, un espace de Sobolev est un espace de Banach ou un espace de Hilbert de fonctions pouvant être dérivées suffisamment de fois pour donner sens à une équation aux dérivées partielles et muni d'une norme qui mesure à la fois la taille et la régularité de la fonction.

En effet, on applique le corollaire 16, on constate que l'image de l'operateur Δ est fermé dans L^2.

2.3.2 La solution dans H^{2+m}

Pour la régularité d'ordre supérieur, on suppose maintenant que $\Delta u = f \in H^m$ avec $m \succeq 0$ entier, et on va constater que la solution sera dans l'espace H^{m+2} par un résultat généralisé, c'est l'inégalité à priori obtenue de **lemme de Peetre :**

$$\exists k \succ 0 \quad \|u\|_{H^{m+2}} \leq k \left(\|\Delta u\|_{H^m} + \|u\|_{H^{m+1}} \right).$$

Preuve. On raisonne par réccurence

1) Pour m=0, on a déjà démontrer qu'il existe une constante k telle que :

$$\exists k \succ 0 \quad \|u\|_{H^2} \leq k \left(\|\Delta u\|_{L^2} + \|u\|_{H^1} \right)$$

2) On suppose que :(si $f \in H^m$ alors $u \in H^{m+2}$).est vraie, et on va montrer le suivant :

$$\text{si} \quad f \in H^{m+1} \text{ alors } u \in H^{m+3}?$$

$u \in H^{m+3}$ cela veut dire que : $u \in H^{m+2}$ et $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy} \in H^{m+2}$

Soit u la solution du problème

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{2.10}$$

Alors (par hypothèse de récurrence)

$$u \in H^{m+2} \tag{2.11}$$

On pose $v = \frac{du}{dx} \in H^{m+1}$(car $u \in H^{m+2}$)

Si $f \in H^{m+1} \Rightarrow g = \frac{df}{dx} \in H^m$

En dérivant par rapport à x dans le problème (2.10), on aura :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}(\Delta u) = \frac{df}{dx}, & \text{dans } \Omega \\ \frac{du}{dx} = 0, & \text{sur } \Gamma \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Cela implique

$$\begin{cases} \Delta v = g, & \text{dans } \Omega \\ v = 0, & \text{sur } \Gamma \\ \frac{dv}{dx} = 0, & \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{2.12}$$

Alors v une solution du problème (2.12)

Par hypothèse de réccurence on a : $v \in H^{m+2}$.

Cela veut dire

$$\frac{du}{dx} \in H^{m+2} \tag{2.13}$$

On fait un raisonnement analogue, on pose $v = \frac{du}{dy}$, et on arrive au résultat suivant :

$$\frac{du}{dy} \in H^{m+2} \tag{2.14}$$

On déduit de (2.11) et (2.13) et (2.1) que $u \in H^{m+3}$.

Alors pour tout entier $m \succeq 0$ on a l'inégalité

$$\exists k \succ 0 \quad \|u\|_{H^{m+2}} \leq k \left(\|\Delta u\|_{H^m} + \|u\|_{H^{m+1}} \right)$$

CHAPITRE 3

ÉTUDE MÉTHODIQUE DE RÉSOLUTION DU PROBLÉME

3.1 Séparation des variables

3.1.1 Introduction

En mathématiques, la séparation des variables constitue l'une des méthodes de résolution des équations différentielles partielles et ordinaires, lorsque l'algèbre permet de réécrire l'équation de sorte que chacune des deux variables apparaisse dans un membre distinct de l'équation .

On considère une équation aux dérivées partielles

$$F(x, y, z, ..., u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, ...) = 0$$

d'une fonction $u\,(x, y, z, ...)$ de n variables . Il est parfois utile de chercher une solution de la forme $u\,(x, y, z, ...) = v(x).w(y).g(z).....$

qui transforme l'équation aux dérivées partielles(EDP) en un ensemble d'équations différentielles ordinaires. De manière habituelle , chaque variable indépendante crée une constante de séparation qui ne peut être déterminée à partir de

la seule équation. Lorsqu'une telle technique s'applique, l'équation est appelée équation aux derivées partielles séparables .

On introduit l'équation différentielle :(de Laplace dans $\mathbb{R}^2$)

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

On applique la méthode de séparation de variable pour résoudre l'équation de Laplace

Les solutions de l'équation de Laplace sont importantes dans beaucoup de domaines de la science, notamment les champs d'électromagnétisme, l'astronomie, la dynamique liquide, parce qu'ils décrivent le comportement d'électrique, de la gravité, et fluide potentiels. La théorie générale de solutions à l'équation de Laplace est connue comme théorie potentielle.

Avec cette méthode on cherche à déterminer au premier lieu les solutions d'un certain type et ensuite on utilise le principe de superposition pour considérer une solution qui serait la somme de ses solutions spéciaux. C'est là que les séries de Fourier entreront en jeu (une brève étude des séries de Fourier ainsi que leurs convergences a été fournit au premier chapitre).

Avant de motiver la méthode de séparation de variables ; on a besoin de Laplacien en coordonnées polaires.

3.1.2 Laplacien en coordonnées polaires

Soit l'équation de Laplace en coordonnées cartézienne

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

On pose

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

On va utiliser la différentielle totale et la règle de chaîne en coordonnées polaires :

$$du = \frac{\partial u}{\partial r}dr + \frac{\partial u}{\partial \theta}d\theta.$$

Cela implique :

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{dr}{dx} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{d\theta}{dx}.$$

Donc pour une dérivée seconde :

$$\begin{aligned}
\frac{d^2u}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{dr}{dx}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{d\theta}{dx}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)\frac{dr}{dx}+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{d^2r}{dx^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\frac{d\theta}{dx}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{d^2\theta}{dx^2} \\
&= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)\frac{dr}{dx}+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{d^2r}{dx^2}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)\frac{d\theta}{dx} \\
&+\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{d^2\theta}{dx^2} \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left(\frac{x}{r}\right)^2+\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \theta}\left(\frac{x}{r}\right)\left(\frac{-y}{r^2}\right)+\frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{y^2}{r^3}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta\partial r}\left(\frac{x}{r}\right)\left(\frac{-y}{r^2}\right) \\
&+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\left(\frac{-y}{r^2}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \theta}\left(\frac{2xy}{r^4}\right)
\end{aligned}$$

Et compte tenu que les dérivées partielles secondes sont continues, alors les dérivées croisées sont égales selon la régle de Schwarz

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta\partial r}=\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \theta}$$

Donc :

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left(\frac{x^2}{r^2}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \theta}\left(\frac{-2xy}{r^3}\right)+\frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{y^2}{r^3}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\left(\frac{y^2}{r^4}\right)+\frac{\partial u}{\partial \theta}\left(\frac{2xy}{r^4}\right)$$

De façon similaire, on aura :

$$\frac{d^2u}{dy^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left(\frac{y^2}{r^2}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \theta}\left(\frac{2xy}{r^3}\right)+\frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{x^2}{r^3}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\left(\frac{x^2}{r^4}\right)+\frac{\partial u}{\partial \theta}\left(\frac{-2xy}{r^4}\right)$$

D'où l'expression du Laplacien en coordonnées polaires en sommant les deux dérniéres expressions ci-dessous :

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

Reciproquement ; de la représentation polaire à la représentation cartézienne

$x = r\cos\theta \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta,\ \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta$

$y = r\sin\theta \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta,\ \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$

Alors

$$\frac{du}{dr} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dr} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dr}$$

$$\frac{du}{dr} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta$$

De même

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{d\theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{d\theta}$$

$$\frac{du}{d\theta} = -r\frac{\partial u}{\partial x}\sin\theta + r\frac{\partial u}{\partial y}\cos\theta$$

On introduit maintenant la deuxième dérivée ; cela donne l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{d^2u}{dr^2} &= \frac{d}{dr}\left(\frac{du}{dr}\right) \\
&= \frac{d}{dr}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\right)\frac{dx}{dr} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\right)\frac{dy}{dr} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\right)\cos\theta + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\right)\sin\theta \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\cos\theta\sin\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin^2\theta \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\theta + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin^2\theta
\end{aligned}$$

D'une façon similaire on calcule $\frac{d^2u}{d\theta^2}$:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = r^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin^2\theta - 2r^2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\sin\theta\cos\theta - r\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + r^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2\theta - r\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta$$

La substitution des expressions obtenues pour $\frac{d^2u}{dr^2}, \frac{du}{dr}, \frac{d^2u}{d\theta^2}$ dans $\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2u}{d\theta^2}$ donne bien :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

3.1.3 Le modèle mathématique

Le potentiel $u(r,\theta)$ satisfait l'équation de Laplace dans Ω

$(r_1 \leq r \leq r_2,$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi)$

$$\Delta u = \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2u}{d\theta^2} = 0 \tag{3.1}$$

Avec les conditions mixtes :

$$u(r_1,\theta) = f(\theta), \ sur \ \Gamma_1 \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial u(r_2,\theta)}{\partial \theta} = g(\theta), \ sur \ \Gamma_2 \tag{3.3}$$

tels que

$$\Gamma_1 = \{(r,\theta), \ r = r_1 \text{ et } 0 \leq \ \theta \leq 2\pi\}$$

$$\Gamma_2 = \{(r,\theta), \ r = r_2 \text{ et } 0 \leq \ \theta \leq 2\pi\}$$

Trouver une solution à l'ensemble (3.1) et (3.2) et (3.3), consiste en la stratégie suivante :

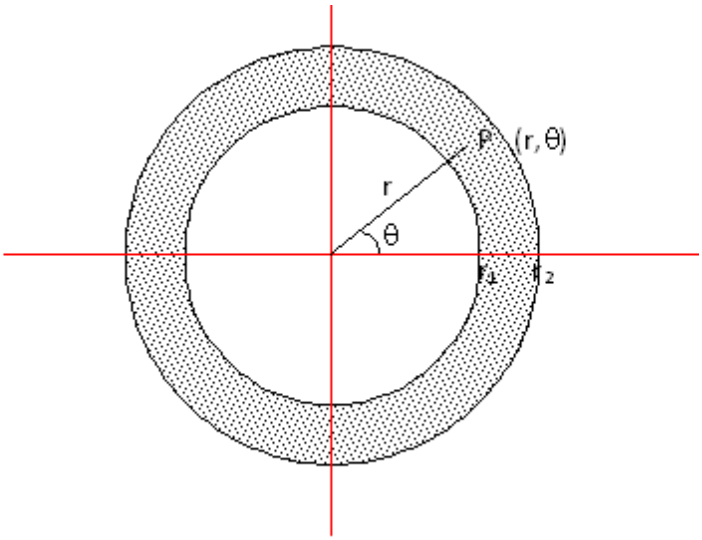

FIG. 3.1 – Section d'une pipeline

3.1.3.1 Fonction à variables séparées

Pour séparer les variables on pose :

$$u(r,\theta) = F(r)\,G(\theta) \tag{3.4}$$

La dérivée seconde par rapport à r est définie comme suite :

$$\partial_r^2 u(r,\theta) = \partial_r^2 (F(r)\,G(\theta)) = F''.G \tag{3.5}$$

$$\partial_\theta^2 u(r,\theta) = \partial_\theta^2 (F(r)\,G(\theta)) = F.G'' \tag{3.6}$$

$$\partial_r u(r,\theta) = \partial_r (F(r)\,G(\theta)) = F'.G \tag{3.7}$$

On substitut les relations (3.5) et (3.6)et (3.7) dans l'expréssion (3.1) ; on obtient :

$$F^{''}.G + \frac{1}{r}F^{'}.G + \frac{1}{r^2}F.G^{''} = 0$$

On divise par FG, cela implique :

$$\frac{F^{''}}{F} + \frac{1}{r}\frac{F^{'}}{F} + \frac{1}{r^2}\frac{G^{''}}{G} = 0$$

Remarque. *Il faut faire attention avec ce raisonnement, car on divise par F et par G. Celui -ci est valable seulement sur les intervalles où* $G \neq 0$ *et* $F \neq 0$. *Le terme de gauche de cette equation est une fonction de r seulement, alors que le terme de droite est une fonction de* θ *seulement (ils ne dépendent pas de la même variable). Pour qu'on puisse avoir cette égalité, il faut donc que chacun de ces termes soit constant et on note cette constante par k. De ceci on tire deux équations différentielles ordinaires*

$$\frac{r^2F^{''}}{F} + r\frac{F^{'}}{F} = -\frac{G^{''}}{G} = k$$

On obtient donc l'équation harmonique : $G^{''}(\theta) + kG(\theta) = 0$.

et l'équation d' Euler Cauchy : $r^2F^{''}(r) + rF^{'}(r) - kF(r) = 0$.

3.1.3.2 L'étude de l'équation harmonique

Cette équation est bien connue, c'est l'équation linéaire d'ordre 2 à coefficients constants et il est facile d'écrire la solution générale pour cette équation. On

détermine les solutions suivant les différentes possibilités pour la constante k :

$$G^{''}(\theta) + kG(\theta) = 0$$

• Pour $k \succ 0$, on a une famille de solution en sinus et cosinus :

$$G(\theta) = A\cos(k\theta) + B\sin(k\theta)$$

$$G(\theta) = G(\theta + 2\pi) \quad \text{et} \quad \frac{dG(\theta)}{d\theta} = \frac{dG(\theta + 2\pi)}{d\theta}$$

donne le résulat suivant : $k = n$, $n = 1, 2, 3....$

• Pour $k = 0$, $G(\theta) = D_{01}\theta + D_{02}$

avec les conditions proposées cela implique $D_{01} = 0$.

• Une constante de séparation négative donne la solution triviale.

$\frac{-G^{''}}{G} = -l^2$, dont les solutions seraient de la forme :

$G(\theta) = E_1 \exp(l\theta) + E_2 \exp(-l\theta)$

En appliquant les conditions, on obtient : $E_1 = E_2 = 0$.

Comme conclusion les solutions périodiques de période 2π, en générale

s'écrivent de la forme suivante

$$G_n(\theta) = A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta)$$

3.1.3.3 L'étude de l'équation d'Euler Cauchy

Pour trouver la solution de l'équation $r^2F''(r)+rF'(r)-kF(r)=0$, on pose $F(r)=r^\alpha$ dans l'équation ci-dessus ; on obtient :

$$\alpha(\alpha-1)r^2\ r^{\alpha-2}+\alpha r r^{\alpha-1}-kr^\alpha=0$$

$$\alpha(\alpha-1)r^\alpha+\alpha r^\alpha-kr^\alpha=0$$

$$(\alpha(\alpha-1)+\alpha-k)r^\alpha=0$$

$$(\alpha^2-k)r^\alpha=0$$

$$\alpha^2-k=0$$

$$\alpha^2=k=n^2$$

Si $n\neq 0$ cela implique que les racines sont $\alpha=\pm n$.

Donc

$$F_n(r)=C_nr^n+D_nr^{-n}$$

Au bout du conpte, les solutions u_n s'écrivent,

$$u_n(r,\theta)=\left(C_nr^n+D_nr^{-n}\right)(A_n\cos(n\theta)+B_n\sin(n\theta))$$

La solution du problème linéaire (dans ce cas, le principe de superposition est valable) est :

$$u(r,\theta) = \sum_{n\succeq 0} u_n(r,\theta)$$

$$u(r,\theta) = \sum_{n\succeq 0} \left(C_n r^n + D_n r^{-n}\right)\left(A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)\right)$$

$$u(r,\theta) = \sum_{n\succeq 0} \left[\left(C_n r^n + D_n r^{-n}\right) A_n \cos(n\theta) + \left(C_n r^n + D_n r^{-n}\right) B_n \sin(n\theta)\right]$$

$$u(r,\theta) = \sum_{n\succeq 0} a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)$$

tel que $a_n = \left(C_n r^n + D_n r^{-n}\right) A_n$, $b_n = \left(C_n r^n + D_n r^{-n}\right) B_n$.

Au final, on cherche une solution de la forme

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\succeq 1} a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta) \tag{3.8}$$

3.1.3.4 Détèrmination des cœfficients

Les cœfficients A_n, B_n, C_n, D_n sont déterminés :

• **Par la condition** (3.2) :

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\succeq 1} a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)$$

Tel que :

$$a_n = \left(C_n r_1^n + D_n r_1^{-n}\right) A_n \tag{3.9}$$

$$b_n = \left(C_n r_1^n + D_n r_1^{-n}\right) B_n \tag{3.10}$$

Ce qui implique

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta \\ a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(\theta) \cos(n\theta)\, d\theta \end{cases} \tag{3.11}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(\theta) \sin(n\theta)\, d\theta \tag{3.12}$$

• **Et par la condition** (3.3) :

$$\frac{\partial u(r_2,\theta)}{\partial \theta} = g(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sum_{n \succeq 0} \left(a_n^* \cos(n\theta) + b_n^* \sin(n\theta) \right) \right)$$

$$g(\theta) = \frac{a_0^*}{2} + \sum_{n \succeq 1} \left(n b_n^* \cos(n\theta) - n a_n^* \sin(n\theta) \right)$$

Tel que

$$a_n^* = \left(C_n r_2^n + D_n r_2^{-n} \right) A_n, \tag{3.13}$$

$$b_n^* = \left(C_n r_2^n + D_n r_2^{-n} \right) B_n \tag{3.14}$$

Alors

$$\begin{cases} a_0^* = \frac{1}{2n\pi} \int\limits_0^{2\pi} g(\theta)\, d\theta \\ a_n^* = \frac{-1}{n\pi} \int\limits_0^{2\pi} g(\theta) \sin(n\theta)\, d\theta \end{cases} \tag{3.15}$$

$$b_n^* = \frac{1}{n\pi} \int\limits_0^{2\pi} g(\theta) \cos(n\theta)\, d\theta \tag{3.16}$$

3.1.4 Exemple

Soit le problème suivant :

$$\Delta U = 0, \quad \text{dans } \Omega \tag{3.17}$$

$$U\left(r = a, \theta\right) = U_0 = 1, \quad \text{sur } \Gamma_a \tag{3.18}$$

$$\tfrac{\partial U}{\partial \theta}\left(r = b, \theta\right) = f\left(\theta\right) = \theta + \theta^2, \quad \text{sur } \Gamma_b \tag{3.19}$$

L'équation à résoudre est l'équation de Laplace $\Delta U = 0$ qui s'écrit en coordonnées polaire

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = 0$$

Afin de se limiter à une seule condition non homogène, on choisi le changement de variable $u(r, \theta) = U(r, \theta) - U_0$, ce qui mène aux conditions suivantes :

$$u\left(a, \theta\right) = U\left(a, \theta\right) - U_0 = 0. \tag{3.20}$$

De $\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial U(r,\theta)}{\partial \theta}$, on déduit :

$$\frac{\partial u\left(b, \theta\right)}{\partial \theta} = f\left(\theta\right). \tag{3.21}$$

Comme le problème est périodique 2π, on a les conditions supplémentaires :

$$\begin{cases} u(r,\theta) = u(r,\theta+2\pi) \\ \frac{\partial u(r,\theta)}{\partial\theta} = \frac{\partial u(r,\theta+2\pi)}{\partial\theta} \end{cases}$$

L'équation de Laplace est inchangeable avec le changement de variables :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = 0$$

On applique la séparation de variables suivante $u(r,\theta) = F(r)\,G(\theta)$, qui introduite dans l'équation de Laplace, mène à :

$$F^{''}G + \frac{1}{r}F^{'}G + \frac{1}{r^2}FG^{''} = 0.$$

Cela équivaux à l'égalité suivante :

$$\frac{r^2F^{''} + rF^{'}}{F} = -\frac{G^{''}}{G} = +k^2$$

Le signe $+$ étant choisi parce qu'on s'attend à obtenir des solutions périodiques à l'equation en G.

3.1.4.1 L'étude de l'EDO en $F(r)$

$$r^2\frac{d^2F}{dr^2} + r\frac{dF}{dr} - k^2F = 0$$

Il s'agit d'une équation d'Euler : une équation linéaire du 2ème ordre à coefficients non constants.

• Pour $k^2 \succ 0$, on a les solutions de la forme suivante :

$$F(r) = C_1 r^k + C_2 r^{-k}$$

En appliquant la condition homogène $F(a) = 0$,

$[u(a,\theta) = F(a)\,G(\theta) = 0,$ cela implique $F(a) = 0]$

on obtient

$$F(a) = C_1 a^k + C_2 a^{-k} = 0$$

Cela implique

$$C_2 = -C_1 a^{2k}.$$

Alors

$$F(r) = C_1 \left[r^n - a^{2n} r^{-n}\right]$$

• Pour $k = 0$, la solution est de la forme

$$F(r) = C_{01} \ln r + C_{02}.$$

En appliquant la condition $F(a) = 0$, cela donne :

$$C_{01} = \frac{-C_{02}}{\ln a}$$

Cela mène à la solution suivante :

$$\begin{aligned} F(r) &= C_{01}\ln r + C_{02} \\ &= \tfrac{-C_{02}}{\ln a}\ln r + C_{02} \\ &= C_{02}\left(1 - \tfrac{\ln r}{\ln a}\right) \end{aligned}$$

3.1.4.2 L'étude de l'EDO en $G(\theta)$

$$\frac{d^2G}{d\theta^2} + k^2\theta = 0$$

- Pour $k^2 \succ 0$, et $G(\theta) = G(\theta + 2\pi)$ et $\frac{dG(\theta)}{d\theta} = \frac{dG(\theta+2\pi)}{d\theta}$

On a une famille de solution en sinus et cosinus :

$$G(\theta) = D_1\cos(k\theta) + D_2\sin(k\theta)$$

tel que $k = n$, $n = 1, 2, 3....$valeur propre

- Pour $k = 0$, $G(\theta) = D_{01}\theta + D_{02}$

avec les conditions proposées cela implique $D_{01} = 0$.

3.1.4.3 La solution du problème homogène

La solution la plus générale, combinaison linéaire de toutes les solutions trouvées du problème homogène est donné :

$$u(r,\theta) = A_0\left(1 - \frac{\ln r}{\ln a}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(A_n\sin(n\theta) + B_n\cos(n\theta)\right)\left(r^n - a^{2n}r^{-n}\right)\right]$$

Où les constantes A_0, A_n, B_n absorbent (si on peut le dire) les constantes $D_{02}, C_{02}, D_1, D_2, C_1$.

3.1.4.4 Condition non-homogène (de Neumann)

La solution du problème doit également satisfaire la condition de Neumann $\frac{\partial u(b,\theta)}{\partial \theta} = f(\theta)$, ce qui s'écrit :

$$\begin{aligned} f(\theta) = \tfrac{\partial}{\partial\theta}[A_0 \left(1 - \tfrac{\ln b}{\ln a}\right) \\ +\sum_{n=1}^{\infty} [(A_n \sin(n\theta) + B_n \cos(n\theta))(b^n - a^{2n}b^{-n})]] \\ =\tfrac{\partial}{\partial\theta}\left(A_0\left(1 - \tfrac{\ln b}{\ln a}\right)\right) \\ +\sum_{n=1}^{\infty} [A_n (b^n - a^{2n}b^{-n}) \cos(n\theta) - B_n (b^n - a^{2n}b^{-n}) \sin(n\theta)] \end{aligned}$$

Ceci peut être réécrit :

$$f(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \sin(n\theta) + b_n \cos(n\theta)]$$

avec

$$\begin{aligned} a_0 &= \tfrac{\partial}{\partial\theta}\left(A_0\left(1 - \tfrac{\ln b}{\ln a}\right)\right) \\ a_n &= -B_n (b^n - a^{2n}b^{-n}) \\ b_n &= A_n (b^n - a^{2n}b^{-n}) \end{aligned}$$

Maintenant on calculer une à une chacune des constantes a_0, a_n, b_n :

• Pour calculer a_0 :

$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, d\theta$, ce là fournit a_0 et donc A_0 :

$$\begin{aligned} a_0 &= \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\theta + \theta^2\right) d\theta \\ a_0 &= \tfrac{1}{2\pi}(\tfrac{\theta^2}{2} + \tfrac{\theta^3}{3} \left(\tfrac{\theta^2}{2} + \tfrac{\theta^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \tfrac{\pi^2}{3} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \tfrac{\pi^2}{3} &= \tfrac{\partial}{\partial\theta}\left(A_0\left(1 - \tfrac{\ln b}{\ln a}\right)\right) \\ \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{\pi^2}{3} d\theta &= A_0\left(1 - \tfrac{\ln b}{\ln a}\right) \end{aligned}$$

Cela équivaux :

$$A_0\left(1 - \frac{\ln b}{\ln a}\right) = \frac{\pi^2}{3}(2\pi)$$

Alors on déduit :

$$A_0 = \frac{2\pi^3}{3(1 - \frac{\ln b}{\ln a})}$$

• Pour calculer a_n :

Au premier lieu, on rappel les identités suivantes qui servent à calculer les relations d'orthogonalité:

$$\begin{aligned} \cos x \cos y &= \tfrac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right], \\ \cos x \sin y &= \tfrac{1}{2}\left[\sin(x+y) - \sin(x-y)\right], \\ \sin x \sin y &= \tfrac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]. \end{aligned}$$

Les relations d'orthogonalité:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n\theta)\,d\theta = 0 \quad \forall n,$$
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(n\theta)\cos(m\theta)\,d\theta = 0 \quad \forall n,m,$$
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n\theta)\cos(m\theta)\,d\theta = 0 \quad \forall n \neq m,$$
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n\theta)\cos(m\theta)\,d\theta = 1 \quad \forall n = m \neq 0.$$

En multipliant la condition par $\frac{1}{\pi}\cos(n\theta)$ et l'intégrant de $-\pi$ à π, on obtient

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta$$

ce qui fournit a_n donc B_n.

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\theta+\theta^2\right)\cos(n\theta)\,d\theta \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\left(\frac{\left(\theta+\theta^2\right)\sin(n\theta)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1+2\theta)\sin(n\theta)}{n}d\theta\right\} \\
&= \frac{-1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+2\theta)\sin(n\theta)\,d\theta \\
&= \frac{-1}{n\pi}\left\{\left(\frac{-(1+2\theta)\cos(n\theta)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \left(\frac{2\sin(n\theta)}{n^2}\right]_{-\pi}^{\pi}\right\} \\
&= \frac{4\cos(n\pi)}{n^2} \\
&= \frac{4(-1)^n}{n^2}
\end{aligned}$$

Donc $a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2} = -B_n\left(b^n - a^{2n}b^{-n}\right)$,

cela implique que les coefficients

$$B_n = \frac{4\left(-1\right)^n}{n^2\left(b^n - a^{2n}b^{-n}\right)}$$

• Pour calculer b_n, de même manière :

En multipliant la condition par $\frac{1}{\pi}\sin\left(n\theta\right)$ et en l'intégrant de $-\pi$ à π, on obtient :

$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left(\theta\right)\sin\left(n\theta\right)d\theta$, cela fournit b_n et donc A_n :

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\theta+\theta^2\right)\sin\left(n\theta\right)d\theta, \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\left(\frac{-\left(\theta+\theta^2\right)\cos(n\theta)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{(1+2\theta)\cos(n\theta)}{n}d\theta\right\} \\
&= \frac{1}{n\pi}\left\{\left(-\left(\theta+\theta^2\right)\cos\left(n\theta\right)\right]_{-\pi}^{\pi} + \left(\frac{(1+2\theta)\sin(n\theta)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{2\sin(n\theta)}{n}d\theta\right\} \\
&= \frac{1}{n\pi}\left\{\left(-\left(\theta+\theta^2\right)\cos\left(n\theta\right)\right]_{-\pi}^{\pi} + \left(\frac{(1+2\theta)\sin(n\theta)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \left(\frac{2\cos(n\theta)}{n^2}\right]_{-\pi}^{\pi}\right\} \\
&= \frac{-2\cos(n\pi)}{n} \\
&= \frac{2(-1)^{n+1}}{n}
\end{aligned}$$

Alors : $A_n\left(b^n - a^{2n}b^{-n}\right) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$.

Cela implique

$$A_n = \frac{2\left(-1\right)^{n+1}}{n\left(b^n - a^{2n}b^{-n}\right)}.$$

Donc la solution du problème de Laplace qui vérifie les conditions mixtes $(3.9), (3.10)$ est sous la forme :

$$u\left(r,\theta\right)=A_0\left(1-\frac{\ln r}{\ln a}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(A_n\sin\left(n\theta\right)+B_n\cos\left(n\theta\right)\right)\left(r^n-a^{2n}r^{-n}\right)\right]$$

tel que :

$A_0=\frac{2\pi^3}{3(1-\frac{\ln b}{\ln a})}$, $A_n=\frac{2(-1)^{n+1}}{n(b^n-a^{2n}b^{-n})}$, $B_n=\frac{4(-1)^n}{n^2(b^n-a^{2n}b^{-n})}$.

CHAPITRE 4

ÉTUDE NUMÈRIQUE DE RÉSOLUTION DU PROBLÈME

4.1 Formulation du problème inverse

On considère le problème direct qui est modélisé par l'équation de Laplace

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{dans } \Omega \\ u = g_c, & \text{sur } \Gamma_c \\ u_\eta = h_c, & \text{sur } \Gamma_c \end{cases} \tag{4.1}$$

tel que u_η est la normal extérieur de u sur la frontière ,les données mixtes g_c, h_c sont connus sur la frontière Γ_c

On suppose que la corrosion ne s'est produit que sur la frontière intérieure Γ_i du domaine Ω et qu'on n'a aucune information de u sur Γ_i , c'est-à-dire que les données g_i, h_i sont inconnus tel que :

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{dans } \Omega \\ u = g_i, & \text{sur } \Gamma_i \\ u_\eta = h_i, & \text{sur } \Gamma_i \end{cases} \tag{4.2}$$

Le problème inverse est de déterminer la corrosion qui s'est produit dans la

partie inaccessible (la frontière intérieure Γ_i) , à partir des mesures (données) sur la frontière extérieure Γ_c. cette corrosion est définie par γ la fonction non-négative tel que

$$u_\eta + \gamma u = 0 \text{ sur } \Gamma_i$$

On va traiter ce problème inverse par des étapes , dans le but de trouver le coefficient inconnu γ à partir des données de Cauchy g_c et h_c sur Γ_c

étape 1 : Résolver le problème de Cauchy (3.2.1) en utilisant la méthode itérative BEM ,dont le but d'obtenir les données de Cauchy sur Γ_i

$$\begin{aligned} u &= g_i, \text{ sur } \Gamma_i \\ u_\eta &= h_i, \text{ sur } \Gamma_i \end{aligned}$$

étape 2 : Déterminer le cœfficient γ comme suite :

$\gamma = -\frac{u_\eta}{u}\Big|_{\Gamma_i} = -\frac{h_i}{g_i}$, si $g_i \neq 0$

4.2 Méthode d'élément de frontière

Dans ce dernier chapitre, on va discuter l'algorithme numérique pour la méthode des éléments finis de frontière connue sous l'acronyme anglo-saxon B.E.M. : Boundary Element Method ; c'est une technique développée depuis le début des années soixante et fondée sur la théorie plus ancienne des équations intégrales de frontiére désignée par B.I.E.pour Boundary Integral Equation. Cette théorie

remonte aux débuts du XIXéme siécle avec entre autres les travaux de Poisson (1820), Betti (1872), Kirchhoff (1882), Fredholm (1896), Kellog (1929), Kupradze (1935)....Ce n'est ensuite qu'autour de 1960, que Jaswon, Hess, Symm, Shaw, Rizzo, Cruse et d'autres vont développer la méthode des éléments finis de frontière, l'appellation B.E.M. n'apparaissant pour la première fois dans la littérature qu'en 1977. Cette méthode a fait depuis l'objet de nombreuses publications et représente toujours un secteur de recherche important notamment grâce à la puissance croissante des calculateurs à disposition.

Le problème inverse peut être traitée par la méthode d'approximation dite BEM, l'algorithme et l'analyse numérique peut être fonctionnée sous l'hypothèse précédente. Il peut être facilement réalisé. Les résultats numériques montrent l'efficacité de cette méthode itérative.

Cet algorithme présenté superpose le problème direct et le problème inverse pour prolonger la trace de la solution sur la partie inaccessible qui est développée en série de Fourier. Afin de pouvoir réaliser l'identification de la localisation des corrosions internes dans le pipeline,on propose la procédure d'identification par la technique suivante ; qui est trés intéressante, trés peu coûteuse.

4.3 Description de l'algorithme

Étape1. On spécifie une estimation initiale pour le problème(4.1) (le probléme initial)

Étape2.

• Soit le problème mixte bien posé suivant :

$$(P_0)\begin{cases} \Delta U^{(0)} = 0, & \text{dans } \Omega \\ U_\eta^{(0)} = h_c, & \text{sur } \Gamma_c \\ U^{(0)} = u_0, & \text{sur } \Gamma_i \end{cases} \tag{4.3}$$

tel que u_0 est un vecteur choisi sur Γ_i.

Résoudre le probléme (P_0) (utilusant la condition connue de Neumann) par la méthode de séparation des variables à fin de déterminer $U^{(0)}(x)$.

et on pose $q_0 = U_\eta^{(0)}(x)$ pour $x \in \Gamma_i$.

Donc on peut calculer la fonction (qui definie la corrosion) par $\gamma_0 = -\frac{q_0}{u_0}$

• Résoudre le probléme (P_1) (utilusant la condition connue de Dirichlet et q_0 sur Γ_i)

$$(P_1)\begin{cases} \Delta U^{(1)} = 0, & \text{dans } \Omega \\ U^{(1)} = g_c, & \text{sur } \Gamma_c \\ U_\eta^{(1)} = q_0, & \text{sur } \Gamma_i \end{cases} \tag{4.4}$$

par la méthode de séparation des variables pour détèrminer $U^{(1)}$ et on pose $u_1 = U^{(1)}$ sur Γ_i .

On peut donc calculer la fonction $\gamma_1 = -\frac{q_0}{u_1}$

• Résoudre le probléme (P_2) (utilusant :la condition connue de Neumann et $u_1$sur Γ_i)

$$(P_2)\begin{cases} \Delta U^{(2)} = 0, & \text{dans } \Omega \\ U_\eta^{(2)} = h, & \text{sur } \Gamma_c \\ U^{(2)} = u_1, & \text{sur } \Gamma_i \end{cases} \tag{4.5}$$

par la même technique , on détermine $U^{(2)}$ et on pose $u_2 = U^{(2)}$ sur Γ_i.

et on pose $q_1 = U_\eta^{(2)}(x)$ pour $x \in \Gamma_i$.

On peut donc calculer la fonction $\gamma_2 = -\frac{q_1}{u_1}$

• De la même façon résoudre (P_3) (utilusant la condition connue de Dirichlet et q_1 sur Γ_i)

$$(P_3)\begin{cases} \Delta U^{(3)} = 0, & \text{dans } \Omega \\ U^{(3)} = g_c, & \text{sur } \Gamma_c \\ U_\eta^{(3)} = q_1, & \text{sur } \Gamma_i \end{cases} \tag{4.6}$$

par la même technique , on détermine $U^{(3)}$ et on pose $u_3 = U^{(3)}$ sur Γ_i.

On peut donc calculer la fonction $\gamma_3 = -\frac{q_1}{u_3}$

On pose $q_2 = U_\eta^{(3)}(x)$ pour $x \in \Gamma_i$

• De la même façon résoudre (P_4) (utilusant :la condition connue de Neumann et u_2 sur Γ_i)

$$(P_4)\begin{cases} \Delta U^{(4)} = 0, & \text{dans } \Omega \\ U_\eta^{(4)} = h_c, & \text{sur } \Gamma_c \\ U^{(4)} = u_2, & \text{sur } \Gamma_i \end{cases} \tag{4.7}$$

on détermine $U^{(4)}$ et on pose $u_4 = U^{(4)}$ sur Γ_i.

et on pose $q_3 = U_\eta^{(4)}(x)$ pour $x \in \Gamma_i$.

On peut donc calculer la fonction $\gamma_4 = -\frac{q_3}{u_2}$

Étape3.

(i) On suppose que l'approximation q_k est obtenue. On peut résoudre le problème mixte aux limites :

$$(P_{2k+1}) \begin{cases} \Delta U^{(2k+1)} = 0, & \text{dans } \Omega \\ U^{(2k+1)} = g_c, & \text{sur } \Gamma_c \\ U_\eta^{(2k+1)} = q_k, & \text{sur } \Gamma_i \end{cases} \tag{4.8}$$

Ensuite, on peut déterminer $U^{(2k+1)}(x)$ pour $x \in \Omega$, et $u_{k+1} = U^{(2k+1)}(x)$ pour $x \in \Gamma_i$.

(ii) De u_{k+1} on peut obtenir $U^{(2k+2)}(x)$ pour $x \in \Omega$, et $q_{k+1} = U_\eta^{(2k+2)}(x)$ pour $x \in \Gamma_i$ ă partir de la résolution le problème mixte aux limites

$$(P_{2k+2}) \begin{cases} \Delta U^{(2k+2)} = 0, & \text{dans } \Omega \\ U_\eta^{(2k+2)} = h_c, & \text{sur } \Gamma_c \\ U^{(2k+2)} = u_{k+1}, & \text{sur } \Gamma_i \end{cases} \tag{4.9}$$

Étape4.

Répétons l'étape 3, pour $k \geq 0$ jusqu'à un critère d'arrêt prévus respecté. Le critère d'arrêt qu'on utilise est :$\|u_{k+1} - u_k\|_{L^2(\Gamma)} \leq \epsilon$, ϵ un petit nombre positif

4.4 Application avec Matlab

Matlab est un puissant logiciel de calcul numérique, de programmation et de visualisation graphique. Matlab est une abréviation de Matrix Laboratory, c'est -à-dire un environnement interactif de travail avec des matrices, pour mener à bien des calculs numériques. La facilité de développement des applications dans son langage fait qu'il est pratiquement devenu le standard dans son domaine.

L'étude numérique du problème inverse est exposée par la méthode BEM, afin d'obtenir une série convergente de fonctions gamma, utilisant le logiciel Matlab pour des résultats prédictifs, permettant d'étudier les principaux paramètres qui influent sur gamma.

4.4.1 Résultats et analyses

Les résultats présentés dans ce chapitre concernent les principaux paramètres qui influent sur le coefficient de Robin γ (la fonction qui détecte l'effet corrosif, et son étendu).

4.4.1.1 L'influence du nombre d'itération n

Dans la figure (fig.4.1)[resp(fig.4.2), (fig.4.3)], on donne la représentation d'une gamme de trajectoire de la fonction γ_i pour $i = 0, ..., i = 2$(resp pour $i = 0, ..., i = 5$,pour $i = 0, ..., i = 8$), cette fonction qui détecte la corrosion qui s'est produit dans la couche interne du pipeline, en fixant

Les parametres suivantes :

Les rayons $r_1 = 1, r_2 = 2$.

La condition de Dirichlet $f_d = 2$.

La condition de Neumann $g_n = \theta + \theta^2$.

La condition initiale $f_i = 1$

.

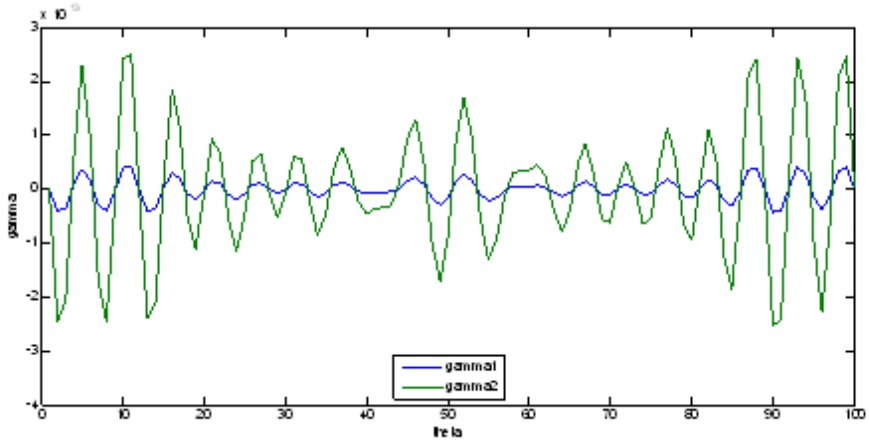

FIG. 4.1 – 2 trajectoires de la fonction gamma

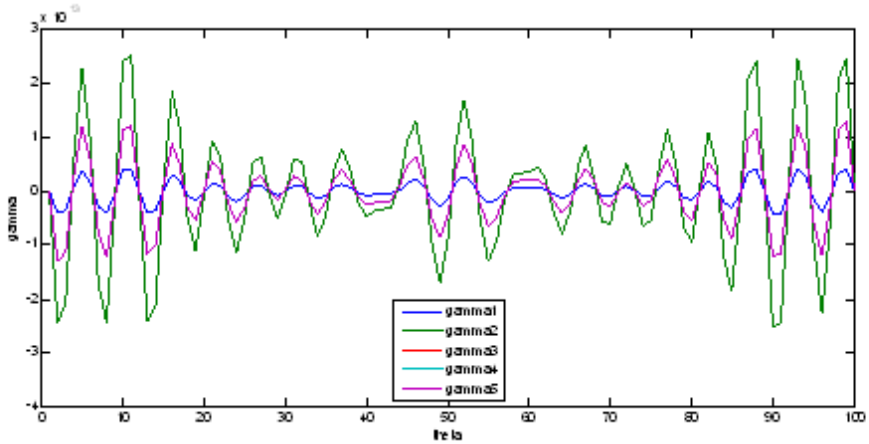

FIG. 4.2 – 5 trajectoires de la fonction gamma

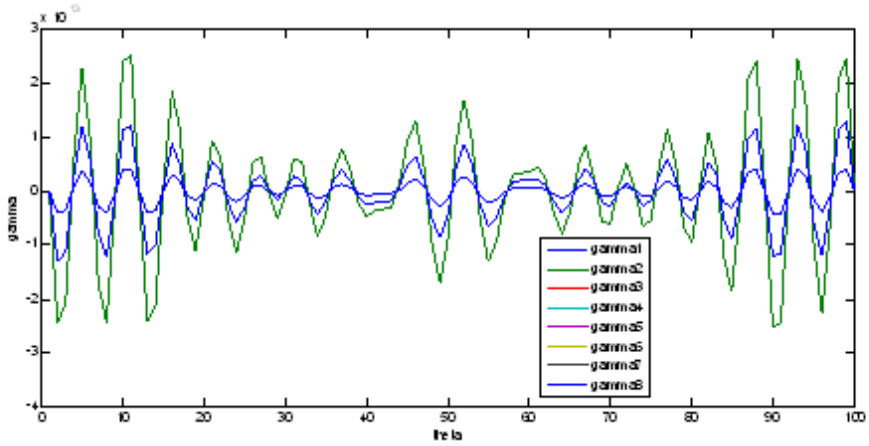

FIG. 4.3 – 8 trajectoires de la fonction gamma

Ces trois figures (Fig4.1) et (Fig4.2) (Fig4.3) donnent l'illustration graphique de la fonction γ qui détecte la corrosion par rapport à la variable θ . Par une première comparaison, on voit la grande ressemblance entre les trois figures, la variation du nombre d'itération n (même si $n = 100$) n'a pas grande influence sur la représentation graphique de gamma. Et cela mène à accepter le programme avec une condition d'arrêt $|u_k - u_{k+1}| \leq 10^{-20}$.

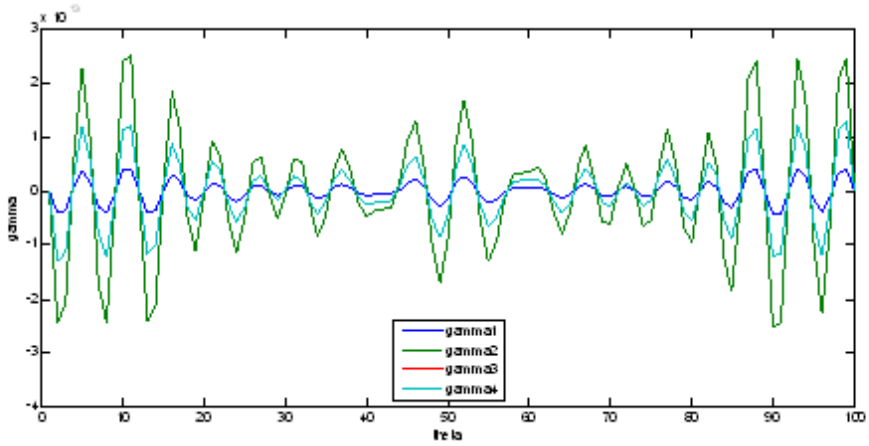

FIG. 4.4 – 4 trajectoires de la fonction gamma

4.4.1.2 L'influence des données aux frontières

Appliquant la condition d'arrêt $|u_k - u_{k+1}| \leq 10^{-20}$ avec les paramètres fixés suivants : les rayons $r_1 = 1, r_2 = 2$, la condition initiale $f_i = 1$. Et les paramètres variantes sont les différentes donnés de la condition de Dirichlet f_d et la condition de Neumann g_n sur Γ_c ; qui sont déterminées dans le tableau (4.1) suivant :.

la condition	1^{er}cas	$2^{éme}$cas	$3^{éme}$cas	$4^{éme}$cas
f_d	2	2	-2	10
g_n	$\sin\theta$	$\theta + \theta^2$	θ	θ

TAB. 4.1 – différentes paramètres des données aux frontiéres

.

Par l'application de la méthode BEM, cela résultent les figures suivantes :

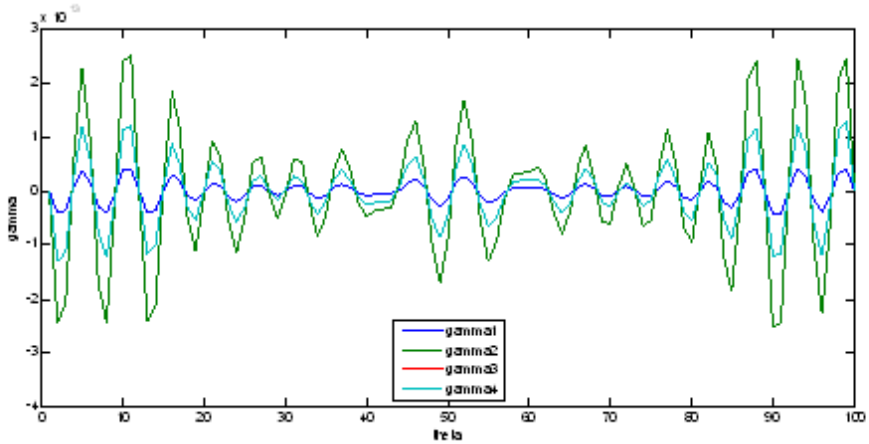

FIG. 4.5 – La visualisation graphique de gamma dans 1^{er}cas

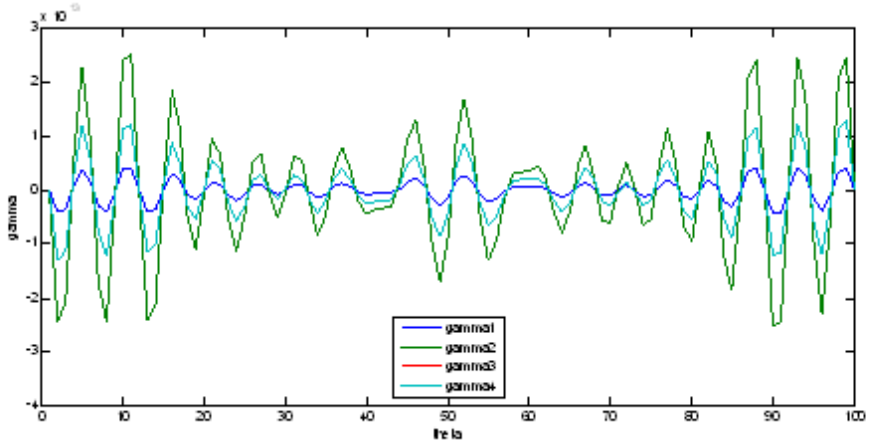

FIG. 4.6 – La visualisation graphique de gamma dans $2^{éme}$cas

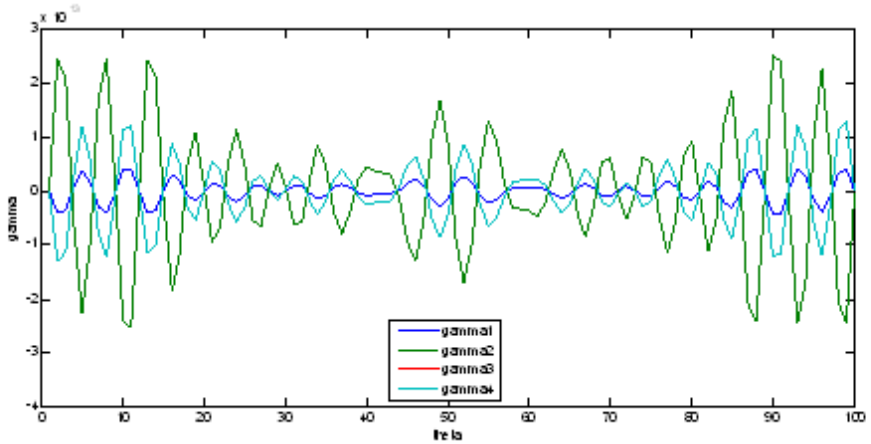

FIG. 4.7 – La visualisation graphique de gamma dans $3^{éme}$cas

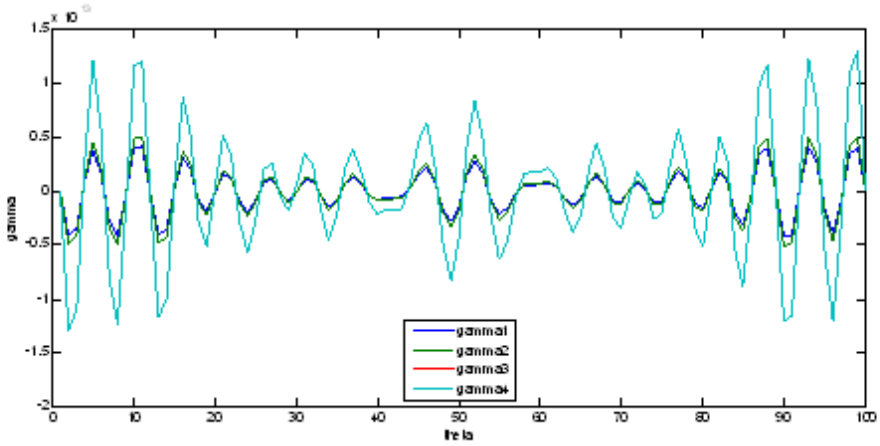

FIG. 4.8 – La visualisation graphique de gamma dans $4^{éme}$cas

La visualisation graphique de gamma dans le cas $[f_d = -2,\ g_n = \theta\ ]$ diffère des autres cas ce qui implique que les donnés aux frontières influent d'une façon remarquable, cela conduit à voir les suggestions du savon Hadamard dans [10]

4.4.1.3 L'influence de la valeur initial f

Un autre paramétre important, il s'agit d'appliquer l'algorithme afin de calculer la fonction γ_i avec différent valeur initial f.

Le tableau suivant représente les différents donnés initiales proposés d'une façon écart.

La valeur initial	1^{er}cas	$2^{éme}$cas	$3^{éme}$cas	$4^{éme}$cas
f	-1	5	0,5	50

TAB. 4.2 – différentes paramètres de la valeur initial f

.

Appliquant le programme pour chaque variation de la valeur initiale f suivant le tableau (4.2) et pour $f_d = 1, g_n = \theta$, $r_1 = 1, r_2 = 2$, cela donne les représentations graphiques de la fonction γ dans les quatre cas.

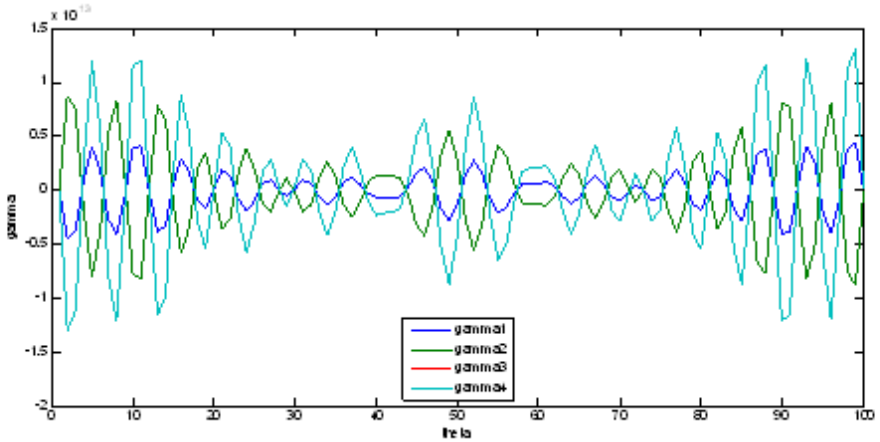

FIG. 4.9 – Représentation graphique de la fonction gamma 1^{er}cas

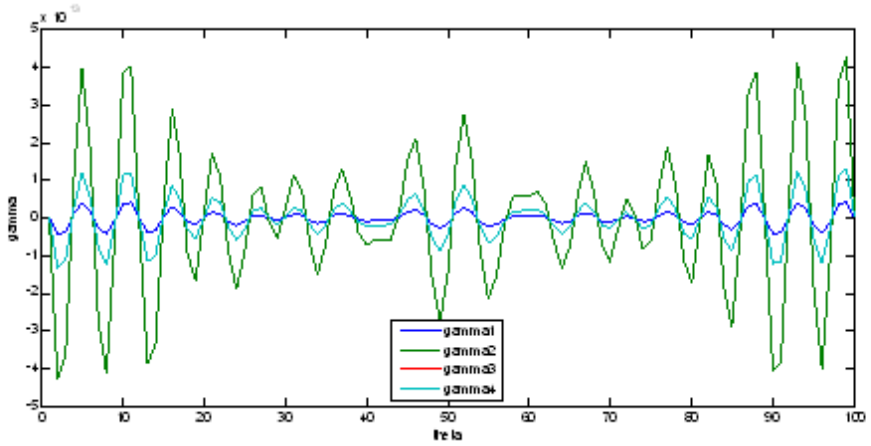

FIG. 4.10 – Représentation graphique de la fonction gamma $2^{éme}$cas

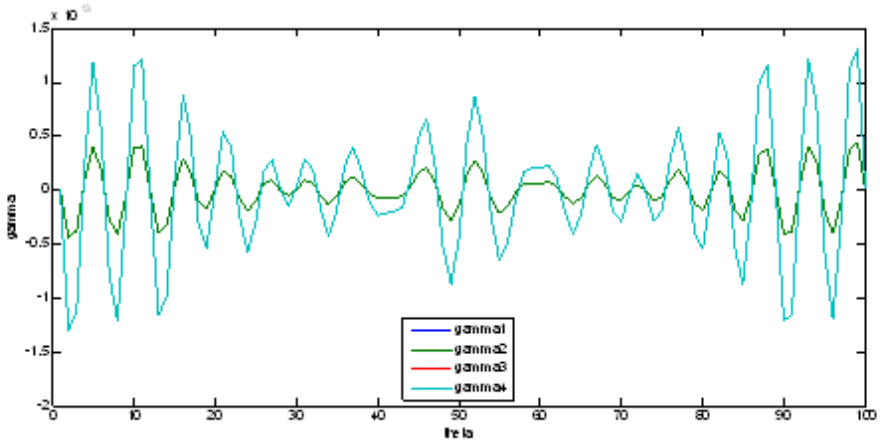

FIG. 4.11 – Représentation graphique de la fonction gamma $3^{éme}$cas

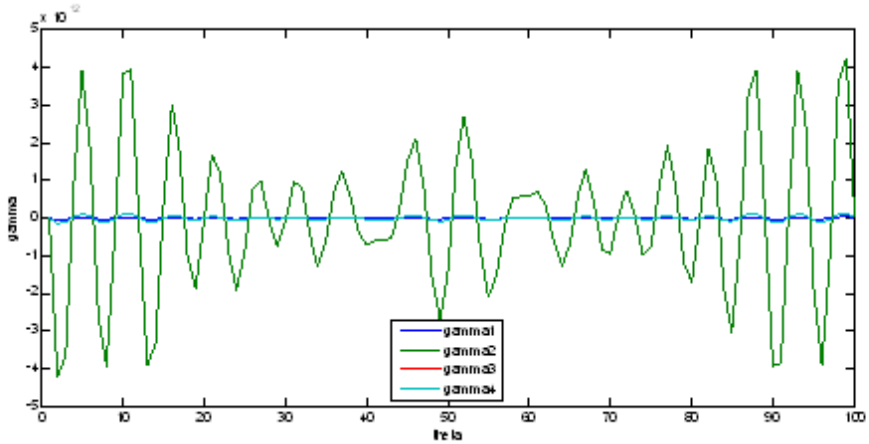

FIG. 4.12 – Représentation graphique de la fonction gamma $4^{éme}$cas

On remarque que les figures (4.9), (4.10), (4.11), (4.12) se manifestent différemment par rapport au facteur f (la valeur initial), cela permet de dire que cette étude ajoute en plus à nos connaissances que ce paramètre influe d'une façon négative dans le cas d'un mauvais choix.

4.4.1.4 L'influence du diamètre de la couronne

Pour étudier ce dernier point, on prend deux problèmes pour étudier numériquement, avec la même structure du programme $f_d = 2, g_n = \theta + \theta^2, f_i = 1$

On prend le choix du paramètre variant dans le tableau (4.3) suivant :

le paramètre r_i	1^{er}cas	$2^{éme}$cas
r_1	1	1
r_2	1,01	100

TAB. 4.3 – différentes paramètres du diametre de la courrone

.

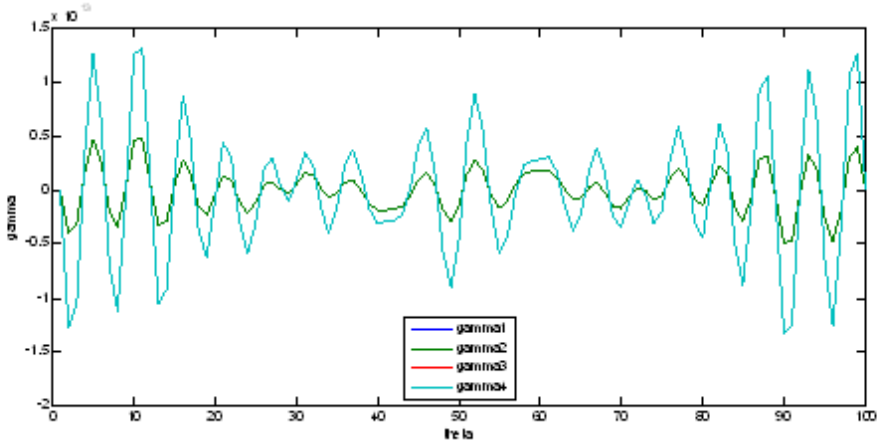

FIG. 4.13 – Représentation graphique de la fonction gamma 1^{er}cas

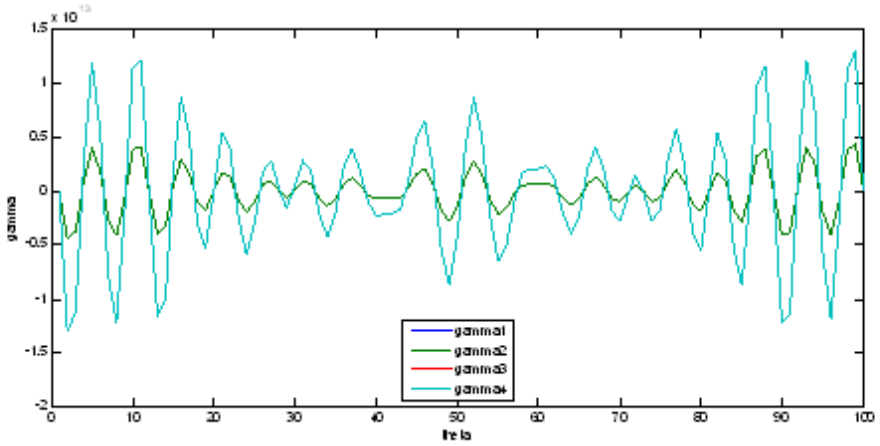

FIG. 4.14 – Représentation graphique de la fonction gamma $2^{éme}$cas

Pour faire comparaison, on a justifié pour cet exemple que malgré le changement proche numérique ou différemment éloigné ce qui concernent le diamètre de la couronne, le problème reste bien posé ; et les solutions ne sont pas éloignée.

Conclusion et perspectives

Cette mémoire, en globale, se résume en trois parties : la partie théorique, consiste à étudier l'existence et l'unicité d'un problème elliptique dans l'espace Sobolev H^1en appliquant le théorème de Lax-Milgram, et dû à l'utilisation du lemme Petree, on obtient la régularité de la solution dans H^2 ; et comme résultat général on a la régularité dans l'espace sobolev H^{m+2}, $m \in \mathbb{N}$. La deuxièmme est la partie analytique, la résolution du problème par la méthode de séparation de variables, dont-on- déduit explicitement la solution complète du problème mixte de Laplace.

La troisième est la partie numérique, on s'est basé à formuler le problème inverse afin de détecter la fonction la corrosion qui s'est produit dans la partie inaccessible (la frontière intérieure du domaine proposé) à partir des mesures (données) sur la frontière extérieure. Pour cela, appliquant l'algorithme de la méthode des éléments finis de frontière numériquement par le logiciel Matlab pour obtenir des représentations graphiques de la fonction gamma. Ces résultats qu'on a établis montrent qu'on peut espérer que :

1) L'importance de la méthode est bien apparue, où grâce à l'algorithme on a pu réaliser l'objectif qui est la détermination des informations sur la corrosion qui s'est produite sur la surface intérieure inaccessible inconnu, en utilisant des données sur la surface de la conduite.

2) La bonne représentation de la solution du problème elliptique ; plus on

augmente le nombre des trajectoires, on obtient une solution plus précise avec une erreur très faible.

3) L'influence des paramètres étudiés.

Quelques perspectives et recommandations :

1) L'utilisation de la méthode séparation des variables est très avantagée dans le cas de résolution des problèmes elliptiques où le domaine d'étude est de frontière courbé ; mais l'essai d'autres méthodes de vitesse de convergence plus vite et d'approximation plus forte que celle- ci est conseillée.

2) L'interprétation des résultats numériques dans cette thèse est obtenue par un choix de paramètre , il est bien recommandé que les exemples de valeurs exactes de la pratique des conduites des instituts pétrolières, ou des conduites d'eau potable des institues plus efficace pour arriver à faire une combinaison entre les filières chimie, math, et physique.

3) La détection de la corrosion interne dans la conduite est sous l'influence de plusieurs facteurs :

• Facteurs définissant les modes d'attaque :

- concentration du réactif.

- PH du milieu.

- additions d'inhibiteurs.

- température.

- pression.

• Facteurs définissant les conditions d'emploi :

- état de la surface.

- forme des pièces

- procédés d'assemblage.

• Facteurs dépendant du temps :

- vieillissement.

- tensions mécaniques.

- modification du revêtement protecteur.

4) Autre point de vue est très important à mentionner, c'est l'interaction d'un objet métallique enfoui et du milieu environnant, ce phénomène complexe considéré dépend des caractéristiques physico-chimiques du métal et du milieu. De plus, les paramètres liés au milieu peuvent évoluer sous l'influence du climat. Cette complexité engendre des formes de corrosion variables.

Paramètres et facteurs liés au processus de la corrosion :

• Nature du milieu (propriété du sol) : aération et permutation aux gaz et à l'eau, hétérogénéité du milieu au contact de la surface du matériau.

• Environnement biologique : bactéries, présence de tanins ou de quinones, éventuels êtres vivants.

• Profondeur d'enfouissement, type de sol : composition minéralogique, compacité de rétention en eau, porosité.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Allaire. *Analyse numérique et optimisation*, "*Une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*", Éditions de l'École Polytechnique - Mai 2006.

[2] S. Beloul, *La resolution du problème de Laplace perturbé dans un polygône plan, par décomposition du domaine*, Mémoire du Magister Univercité Quasdi Merbah Ouargla, 2010.

[3] F. Boyer, *Analyse numérique des EDP elliptiques*, Notes de cours Aix-Marseille universités 2011, http ://www.cmi.univ-mrs.fr/~fboyer/ Enseignement/M2_AN/Cours_M2_ANEDP_fboyer.pdf

[4] H. Brézis. *Analyse fonctionnelle*, "Théorie et applications", Dunod, Paris 1999.

[5] J. Cheng, M. Choulli, X. Yang. An Iterrative BEM for the inverse problem of detecting corrosion in a pipe, Numerical mathematics , A journal of chinese universites, Vol 14. No3 Ang 2005.

[6] B. Després, *Approximation des Equations aux Dérivées Partielles*, Notes de cours,2011. http ://www.ann.jussieu.fr/~despres/BD_fichiers/cours_m1.pdf

[7] R. Herbin, *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Notes de cours, Université Aix Marseille 1, Master de mathématique 2006-2007. http ://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download ?doi=10.1.1.76.2298& rep=rep1&type=pdf

[8] J.w. Hill, H. Ralph, M. Dion, M. Lamoureux, *Chimie générale*. Edition de Renoueau pedagogique, Canada 2002.

[9] F. Hirsch, G. Lacombe. *Éléments d'analyse fonctionnelle* "cours et exercices avec réponses", Dunod, Paris, 1999.

[10] L.Jacques Hadamard, *Lectures on cauchy' s problem in linear partial differential equations*.dover publications, New York, 1953
en.wikipedia.org /wiki/ Jacques _Hadamard.

[11] M. Krasnov, A. Kisselev, G. Makarenko. *Recueil de Problèmes sur les équations différentielles ordinaires*. Traduit du Russe par V. Koliméev 1981.

[12] H. Le Dret, *Équation aux dérivées partielles elliptiques*, Notes de cours, Université Pierre et Marie Curie, mars 2010. http ://www.ann.jussieu.fr/~ledret/M2Elliptique/Rappels.pdf

[13] A. Magnus, *Analyse numérique 2*, Institut de Mathématique Pure et Appliqée, Université Catholique de Louvain, (Belgium).
(0)(10)473157, mailto : magnus@inma.ucl. ac. be, http : //www. math. ucl. ac. be/membre/magnus/

[14] M. Mahjoub, *Approximation harmonique dans une couronne et applications à la résolution numérique de quelques problèmes inverses*, Thése de Doctorat, École nationale d'ingénieurs de Tunisie 2008.www-sop.inria.fr/apics/documents/these_mahjoub.pdf

[15] S. Nicaise. *Analyse numérique et équations aux dérivées partielles*."Cours et problèmes résolus", Dunod, Paris, 2000.

[16] N. Piskounouv, *Calcul Différentiel et Intégral* ; Tome2, office des publications universitaire : 04-2010.

[17] J.E. Rakotoson, J.M. Rakotoson. *Analyse fonctionnelle appliquée aux équations aux dérivées partielles*, Presses Universitaires de France, 1999.

[18] L. Schwartz : *Analyse, Topologie générale et analyse fonctionnelle*. Hermann, Enseignement des sciences, 1970.

[19] C.Vargel. *Corrosion de l'Aluminium*, Dunod, Paris, 1999. ISBN 2100041916.