Table des matières

INTRODUCTION

J. Fourier (1768-1830) est le premier mathématicien qui a découvert ce genre d'équations intégrales dû au fait qu'il a obtenu la formule de la transformation de Fourier. Il est clair qu'on peut interpréter la formule d'inversion en tant que fournir l'opérateur inverse de l'opérateur d'intégrale de Fourier.

En 1837, J. Liouville (1809-1882) a publié une discussion sur la relation entre les équations intégrales et les équations différentielles dans lesquelles il montrait qu'une solution particuliére d'une équation différentielle linéaire est obtenue en résolvante une équation intégrale.

En 1887, V. Volterra (1860-1940) a établi la méthode de résolution des équations intégrales par les noyaux itérés. En outre, il a étendu la théorie d'équations intégrales aux équations intégro-différentielles et aux équations intégrales singulières.

Fredholm (1866-1927) a étudie la méthode pour résoudre l'équations intégrales de deuxième espèce. La théorie des équations intégrales intervient dans plusieurs domines des mathématiques, beaucoup de problèmes dans le domaine des équations différentielles ordinaires et partielles, la physique mathématique, les problèmes de contacts et de l'arstrophysique peut être formulée comme une équation intégrale.

Ainsi, la théorie de l'équations intégrales a ètè un domine de recherche actif dans la mathématiques appliquées et la physique mathématique.

L'importance des équations intégrales dans toutes les branches de la science et l'ingénierie nous améne à étudier certaines de ces équations et les réaliser numériquement.

Dans ce mémoire, nous allons traiter quelques équations intégrales non-liéaires, où on étudie l'existence des solutions de ces équations.

Notre travail est reparti en quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, nous rappelons les notions de l'analyse fonctionnelle, les espaces métriques; l'espace Hilbert; l'espace $L^p([a,b])$, et on représenté les opérateurs compacts et ses propriétés.

Le deuxième chapitre, présente une classification entre les équations intégrales linéaires et non-linéaires, comme on a donné des exemples sur ces équations, en fin on etude l'existence et l'unicité de la solution de l'équation intégrale linéaire et non- linéaire de Volterra, comme on présente la résolution approchée d'équation intégrale non-linéaire exactement la méthode approximations successives.

Dans le troisième chapitre, on commance par poser notre problème où on démontre l'existence des solutions dans l'espace $L^p([a,b])$ des équations intégrales non-linéaires de types Hammerstein, et l'existence et l'unicité de la solution continue des équations intégrales non-linéaire de Hammerstein-Volterra en utilisant des théorèmes du point fixe.

Le quatrième chapitre, on démontre l'existence de la solution d'une équation intégrale non-linéaire aussi que la modélisation de l'infiltration des fluides, en appliquant l'alternative non linéaire de Leray-Schauder.

Chapitre 1

RAPPELS ET NOTIONS FONDAMENTALES

1.1 ESPACES FONCTIONNELS

1.1.1 Définitions (Rappels)

Commençons par rappeler la définition d'un espace vectoriel normé.

Définition 1.1.1 ***(Espace vectoriel normé)***

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on appelle norme sur l'espace E toute application notée $\|\cdot\|$ définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}_+$,

vérifiant pour tout x, y dans E et α dans $\mathbb{k}$

i) $\|x\| = 0$ si seulement si $x = 0$.

ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ (homogènéité).

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

Tout espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

Exemple 1.1.1

Soit $C([a, b], \mathbb{R})$, l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs réelles. Pour tout $f \in C([a, b]\ , \mathbb{R})$, on pose

$$\|f\|_1 = \int_a^b f(x)dx \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \,.$$

Les applications $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $C\left([a,b],\mathbb{R}\right)$.

Définition 1.1.2 ***(Espace métrique complet)***

On dit que E est un espace métrique complet si toute suite de Cauchy de E converge dans E.

Définition 1.1.3 ***(Espace de Banach)***

Tout espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach.

Exemple 1.1.2

($C\left([a,b],\mathbb{R}\right)$, $\|\cdot\|_\infty$) est un espace de Banach.

Définition 1.1.4 ***(Produit scalaire)***

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, un produit scalaire sur E est application de $E\times E$ dans $\mathbb{R}$, notée $\langle\cdot,\cdot\rangle$ possédant les propriétés suivantes :

pour tout x, y, z dans E et α, β dans $\mathbb{R}$,

i) $\langle\alpha x+\beta y, z\rangle = \alpha\langle x,z\rangle + \beta\langle y,z\rangle$.

ii) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$.

iii) $\langle x,x\rangle \geq 0$.

iv) $\langle x,x\rangle = 0$ implique $x=0$.

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace euclidien ou un espace préhibertien.

Remarque 1.1.1

Un produit scalaire sur E définit une norme sur E par la formule suivante

$$\|x\|_E = \sqrt{\langle x,x\rangle}.$$

Définition 1.1.5 ***(Espace de Hilbert)***

Un espace de Hilbert est espace vectoriel muni d'un produit scalaire, et qui est complet pour la norme associée à ce produit scalaire.

Définition 1.1.6 ***(Espace*** $C\ [a\ ,\ b]$***)***

Des fonctions continues sur $[a,\ b]$, de norme $\|x\| = \max\limits_{t\in|a,b|} |x\,(t)|$.

Définition 1.1.7 ***(Espace*** $C^k\,[a,\ b]$***)***

Des fonctions k fois continument dérivables sur $[a,\ b]$, de norme

$$\|x\| = \sum_{i=0}^{k} \max \left|x^i\,(t)\right|, \text{ telle que } x^0\,(t) = x\,(t)\,.$$

Définition 1.1.8 ***(Espace*** $L^1\,(\Omega)$***)***

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on désigne par $L^1\,(\Omega)$ des fonctions intégrable sur Ω à valeur dans $\mathbb{R}$, on pose

$$\|f\|_1 = \int\limits_{\Omega} |f\,(x)|\,dx.$$

Définition 1.1.9 *(**Espace*** $L^P\,(\Omega)$*)*

Soit $1 \leq\ \ p \leq +\ \infty$, on pose

$$L^P\,(\Omega) = \left\{f\ :\ \Omega \to \mathbb{R},\ \ f \ \text{ mesurable et } \ |f\,(x)|^p \in L^1\,(\Omega)\right\}$$

.

muni de la norme

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = (\int\limits_{\Omega} |f\,(x)|^p\,dx)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$, on a $\mathrm{L}^\infty\,(\Omega)$ est l'espace des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable, vérifiant

$$\exists c > 0 \text{ telle que } \ |f\,(x)| \leq c,\ \ p.p. \text{ sur } \Omega.$$

La norme est notée par

$$\|f\|_{L^\infty} = \|f\|_\infty = \inf\left\{c > 0, |f\,(x)| \leq c,\ \ p.p.\ \text{ sur } \Omega\right\}.$$

Remarque 1.1.2

Si $f \in L^{\infty}(\Omega)$, on a

$$|f(x)| \leq \|f\|_{\infty}, p.p. \text{ sur } \Omega.$$

Théorème 1.1.1 ***(Fischer - Riesz)***

L'espace L^P est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

Théorème 1.1.2 ***(Théorème de convergence dominée de Lebesgue)***

Soit (f_n) une suite de fonctions de L^1. On suppose que

i) $f_n(x) \to f(x)$ $p.p.$ sur Ω.

ii) il existe une fonction $g \in L^1$ telle que pour chaque n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ $p.p.$ sur Ω.

Alors

$$f \in L^1(\Omega) \text{ et } \|f_n - f\|_{L^1} \to 0.$$

Théorème 1.1.3 *(voir [6])*

Soient (f_n) une suite de L^p et $f \in L^p$, tels que

$$\|f_n - f\|_{L^p} \to 0.$$

Alors, il existe une sous-suite extraite (f_{n_k}) telle que

i) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ $p.p.$sur Ω.

ii) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ $\forall k$ et $p.p.$ sur Ω, avec $h \in L^p$.

1.1.2 Inégalités des auxiliaires

a) Inégalité de Hölder

Soient p et q deux exposants conjugues (i.e. $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$) et $f \in L^p$, $g \in L^q$ alors,

$$f.g \in L^1 \text{ et } \int |fg| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q . \tag{1.1.1}$$

b) Inégalité de Cauchy - Schwarz

Pour $p = q = 2$, l'inégalité (1.1.1) devient

$$\int |fg|\, dx \leq \left(\int |f|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |g|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.1.2}$$

c) Inégalité de Minikowski

Soit $p \geqslant 1$ et f, g deux fonctions dans $L^P(\Omega)$; alors, la somme $f + g$ est aussi dans $L^P(\Omega)$ et l'on a

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p\,. \tag{1.1.3}$$

d) Une inégalité utile

Soit a_i $(1 \leq i \leq N)$ des réels strictement positifs et $p \geq 1$ un entier naturel.

Alors

$$\left(\sum_{i=1}^{i=N} a_i \right)^p \leq 2^{(N-1)(p-1)} \sum_{i=1}^{i=N} a_i^p. \tag{1.1.4}$$

e) Inégalité de Young

Soit $p,\ q$ deux réels exposants conjugues. Alors

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^2 :\ ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{1.1.5}$$

Lemme de Gronwall

Soient φ, ψ et y trois fonctions continues sur segment $[a, b]$, à valeurs positives et vérifiant l'inégalité

$$\forall t \in [a,b]\,,\ y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s)\, y(s)\, ds.$$

Alors

$$\forall t \in [a,b]\,,\ y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s)\, \psi(s) \exp\left(\int_s^t \psi(u)\, du \right) ds. \tag{1.1.6}$$

Preuve

En posant

$$F(t) = \int_a^t \psi(s)\, y(s)\, ds.$$

En multipliant les deux membres de l'inégalité donnée en hypothèse par $\psi(t)$, on obtient

$$F'(t) - \psi(t) F(t) \leq \varphi(t) \psi(t),$$

ce qui s'ecrit aussi

$$G'(t) \leq \varphi(t) \psi(t) \exp\left(-\int_s^t \psi(s)\, ds\right) \qquad \text{avec} \qquad G(t) = F(t) \exp\left(-\int_s^t \psi(s)\, ds\right)$$

Comme $G(a) = F(a) = 0$, on en déduit, par intégration

$$G(t) \leq \int_a^t \varphi(s) \psi(s) \exp\left(-\int_s^t \psi(u)\, du\right) ds$$

Or par hypothèse,

$$y(t) \leq \varphi(t) + G(t) \exp\left(\int_s^t \psi(s)\, ds\right),$$

d'où le résulta en utilisant l'inégalité ci-dessus. ■

Corollaire 1.1.1

Soient ψ et $y : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ deux fonctions continues vériviant

$$\exists c \geq 0 / \forall t \in [a, b],\, y(t) \leq c + \int_a^t \psi(s) y(s)\, ds$$

Alors

$$\forall t \in [a, b],\; y(t) \leq c \exp\left(\int_a^t \psi(s)\, ds\right). \tag{1.1.7}$$

Preuve

Il s'agit du lemme de Gronwall dans le cas particulier oú φ est constante égale à c, on a donc pour tout $t \in [a, b]$,

$$y(t) \leq c + \int_a^t c\psi(s) \exp\left(\int_s^t \psi(u)\, du\right) ds = c + c\left[-\exp\left(\int_s^t \psi(u)\, du\right)\right]_a^t = c \exp\left(\int_a^t \psi(s)\, ds\right).$$

■

1.2 NOTIONS SUR LES OPÉRATEURS

1.2.1 Les opérateurs linéaires bornés

Définition 1.2.1

Soient X et Y deux espaces normés, un opérateur A défini sur X dans Y et dite linéaire s'il vérifie les conditions suivantes :

pour tout u, v dans X et α, β dans $\mathbb{R}$

i) $Au \in Y$.

ii)$A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av$.

Définition 1.2.2

Un opérateur linéaire A défini sur X dans Y et dite borné s'il existe une constante positive C, telle que :

$$\|Au\|_Y \leq C \|u\|_X , \ \forall u \in X.$$

Proposition 1.2.1

Le plus petit de nombres C vérifiant cette inégalité s'appelle norme de l'opérateur A et se note $\|A\|$, on a

$$\|A\| = \sup_{\|u\| \leq 1} \|Au\| = \sup_{u \neq 0} \frac{\|Au\|}{\|u\|}.$$

Preuve

Pour la preuve voir [19].

Proposition 1.2.2

Soient X et Y deux espaces normés et $T : X \to Y$ un opérateur linéaire, les proprietés suivantes sont équivalentes

i) L'opérateur T est continu sur X.

ii) L'opérateur T est continu au point 0_X.

iii) L'opérateur T est borné.

Théorème 1.2.1

Soit A un opérateur linéaire borné d'un espace de Banach E dans lui-même avec $\|A\| < 1$, et soit I l'opérateur identique dans E.

Alors, l'opérateur $I - A$ admet un opérateur inverse borné, donné par la série de Neumann :

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k,$$

de plus

$$\left\|(I - A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Démonstration

De la relation $\|A\| < 1$, on a la convergence absolue

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\|A^k\right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k = \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Dans l'espace de Banach $L(E)$ (l'espace $L(E)$ de tous les opérateurs linéaires continus sur E dans lui-même), par conséquent la série de Neumann converge en norme et définie un opérateur linéaire borné

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} A^k,$$

avec la relation

$$\|S\| \leq (1 - \|A\|)^{-1}$$

de plus S est l'inverse de $(I - A)$.

En effet, utilisons les notations $\left(A^0 = I \ et \ A^k = AA^{k-1}\right)$, on peut voir que :

$$S(I - A) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} A^k (I - A) = \lim_{n\to\infty} \left(I - A^{n+1}\right) = I$$

aussi

$$(I - A) S = (I - A) \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} A^k = \lim_{n\to\infty} \left(I - A^{n+1}\right) = I$$

puisque la norme

$$\left\|A^{n+1}\right\| \leq \|A\|^{n+1} \to 0, \text{ lorsque } n \to \infty. \quad \blacksquare$$

1.2.2 Opérateur intégral linéaire

Définition 1.2.3

Un opérateur intégral linéaire A est un opérateur qui admet une formulation de la forme suivante

$$(A\varphi)\, x = \int_a^b K\,(x,t)\,\varphi\,(t)\,dt.$$

La fonction K étant appelée noyau de l'opérateur A.

Remarque 1.2.1

Si K est une fonction continue de $[a,b] \times [a,b]$, l'opérateur A est appelé opérateur intégral à noyau continu K.

1.2.3 L' opérateur adjoint

Théorème 1.2.2

Soit H un espace de Hilbert et soit A un opérateur linéaire borné défini sur H à valeur dans H, alors il éxiste un opérateur linéaire borné noté A^* défini de H dans H par

$$\langle A\varphi, \psi\rangle = \langle \varphi, A^*\psi\rangle \quad \text{pour tout} \quad \varphi \text{ et } \quad \psi \in H$$

de plus, on a

$$\|A\| = \|A^*\|\,.$$

Proposition 1.2.3

Soit A un opérateur intégral défini à partir d'un noyau K continu sur $[a,b] \times [a,b]$ par la formule suivante

$$\forall x \in [a,b]\,,\ (A\varphi)\,x = \int_a^b K\,(x,t)\,\varphi\,(t)\,dt$$

Alors, l'opérateur A admet un unique opérateur adjoint A^* pour le produit scalaire usuel de L^2. Pour tout $x \in [a,b]$,

$$(A^*\psi)\,x = \int_a^b K\,(t,x)\,\psi\,(t)\,dt.$$

Preuve

Pour φ et ψ deux fonctions de $C([a,b])$, on a

$$\langle A\varphi, \psi\rangle = \langle \varphi, A^*\psi\rangle$$

donc

$$\int_a^b \varphi\,(t)\,A^*\,(\psi\,(t))\,dt = \int_a^b A\varphi\,(x)\,\psi\,(x)\,dx$$

$$= \int_a^b \left\{ \int_a^b K\,(x,t)\,\varphi\,(t)\,dt \right\} \psi\,(x)\,dx.$$

En vertu du théorème de Fubini relatif aux intégrales doubles, on établit que

$$\langle A\varphi\,(x)\,,\psi\rangle = \int_a^b \int_a^b \left[K\,(x,t)\,\psi\,(x)\,dx\right] \varphi\,(t)\,dt$$

$$= \int_a^b \varphi\,(t) \left[\int_a^b K\,(x,t)\,\psi\,(x)\,dx \right] dt$$

$$= \int_a^b \varphi(t) A^*(\psi)(t)\, dt$$

il en résulte que l'adjoint A^* est défini pour tout x dans $[a, b]$ par

$$A^*\psi(x) = \int_a^b K(t, x)\psi(t)\, dt. \quad \blacksquare$$

Corollaire 1.2.1

Soit A l'opérateur intégral de noyau K, et A^* est l'opérateur intégral de noyau K^*, avec

$$K^*(t, x) = K(x, t)$$

Définition 1.2.4 ***(Opérateur auto-adjoint)***

Soit H un espace de Hilbert, on dit que l'opérateur A est auto-adjoint si $A^* = A$, i.e. si pour tout $x, y \in H$ on a

$$\langle A\varphi, \psi\rangle = \langle \varphi, A\psi\rangle .$$

Corollaire 1.2.2

L'opérateur integral A de noyau K est auto-adjoint si, et seulement si, le noyau K est symétrique :

$$K(x, t) = K(t, x), \quad \forall x, t \in [a, b] .$$

1.2.4 Opérateurs compacts

Définition 1.2.5 ***(Compacité)***

Soit U un ensemble d'un espace normé X, U est dit compact si de tout recouvrement de U par des ouverts de U on peut extaire un sous-recouvrement fini i.e.
$\forall V_j, j \in J$ (ouverts)$; U \subset \bigcup\limits_{j\in J} V_j, \exists V_{j(k)},\ j(k) = 1, 2, ..., n$ tel que $U \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} V_j(k)$.

Définition 1.2.6

Un sous ensemble d'un espace normé est dit relativement compact si son adhérence est compacte.

Définition 1.2.7 ***(Opérateur compact)***

Soit T un opérateur d'un espace normé X dans un espace normé Y, on dit que T est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné dans X à un ensemble relativement compact dans Y.

Définition 1.2.8 ***(opérateur complètement continu)***

L'opérateur T est dite complètement continu, si elle est continu et compact.

Définition 1.2.9

L'opérateur T est compact, si et seulement si pour toute suite bornée $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$, la suite $\{Tx_n\}_{n\geq 1}$ admet que sous suite convergente dans Y.

Dans le cas particulier où $X = C([a, b])$, le théorème suivant d'Arzela-Ascoli est généralement utilisé pour prouver la compacité de T.

Théorème 1.2.3 ***(Arzela-Ascoli)***

Une condition nécessaire et suffisante q'une famille des fonctions continues définies sur l'intervalle compact $[a, b]$, est compacte dans $C([a, b])$ est que cette famille est uniformément bornée et équicontinue.

Théorème 1.2.4

L'opérateur intégral A de $C([a, b])$ dans $C([a, b])$ à noyau continu est un opérateur compact.

Démonstration

Soit E un ensemble borné de $C([a, b])$ alors, on a

$\|\varphi\| \leq M$, pour tout $\varphi \in E$, de plus

$$|A\varphi(x)| \leq M|b-a| \max_{x,t\in[a,b]} |K(x,t)|, \forall x \in [a,b] \text{ et } \forall \varphi \in E.$$

D'ou l'ensemble $A(E)$ uniformément borné.

D'autre part, le noyau K est uniformément continu sur le compact $[a,b] \times [a,b]$, d'ou pour tout x, t, z de $[a,b]$, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tel que } |x-t| < \delta \Longrightarrow |K(x,z) - K(t,z)| < \frac{\varepsilon}{M|b-a|}.$$

D'où,

$|A\varphi(x) - A\varphi(t)| < \varepsilon$, pour tout $\varphi \in E$ et $x, t \in [a,b]$ avec $|x-t| < \delta$.

Ceci exprime que l'ensemble $A(E)$ est équicontinu, d'où $A(E)$ est relativement compact par le théorème d'Arzela-Ascoli, alors A est compact. ■

Théorème 1.2.5

Un opérateur compact est un opérateur borné, la réciproque est fausse.

Démonstration

En effet, si on désigne par

$$B(0,1) = \{x \in X, \ \|x\| \leq 1\},$$

alors, $T(B(0,1))$ est relativement compact d'ou

$$\|Tx\| \leq C, \forall x \in B(0,1).$$

Alors T est borné.

Réciproquement, l'opérateur indentique I de X dans X est borné, mais il n'est pas compact car $I(B(0,1)) = B(0,1)$, n'est pas relativement compacte sauf si X est de dimension finie. ■

Théorème 1.2.6

Une combinaison linéaire $T = \alpha T_1 + \beta T_2$ des opérateurs compacts est un opérateur compact.

Théorème 1.2.7

Le produit T_1T_2 de deux opérateurs bornés T_1 et T_2 est compact si l'un des opérateurs T_1 ou T_2 est compact.

Théorème 1.2.8

Soit X un espace normé et Y un espace de Banach, et soit $\{T_n\}$ une suite d'opérateurs compacts de X dans Y.

$$\text{Si} \quad \lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0.$$

Alors, T est compact.

Théorème 1.2.9

Soit T un opérateur borné de X dans Y, à image $T(X)$ de dimension finie. Alors Test compact.

1.2.5 Opérateur produit

Soient T_1 et T_2 deux opérateurs intégraux sur $L_p(E)$ avec des noyaux K_1 et K_2 respectivement, l'opérateur produit noté T_1T_2 envoie aussi $L_p(E)$ dans $L_p(E)$, où

$$(T_1T_2)\varphi = T_1(T_2\varphi).$$

Si les noyaux K_1 et K_2 justifient l'interchangement de l'ordre d'intégration alors, on peut déduire le noyau K du produit T_1T_2 en fonction de K_1 et K_2.

$$\begin{aligned} T_1T_2\varphi(x) &= \int K_1(x,z) \int T_2\varphi(z)\,dz \\ &= \int K_1(x,z)\,dz \int K_2(z,y)\,\varphi(y)\,dy \\ &= \int \varphi(y)\,dy \int K_1(x,z)\,K_2(z,y)\,dz. \end{aligned}$$

D'où l'opérateur T_1T_2 est un opérateur intégral de noyau,

$$K(x,y) = \int K_1(x,z)\, K_2(z,y)\, dz.$$

Notons que si, on prend $T_1 = T_2 = T$, de noyau $K_1 = K_2 = K$, alors l'opérateur $T_1T_2 = T^2$ admet le noyau $K_2(x,y)$ donné par

$$K_2(x,y) = \int K(x,z)\, K(z,y)\, dz,$$

par itération le noyau $K_n(x,y)$ de T^n est

$$K_n(x,y) = \int K(x,z)\, K_{n-1}(z,y)\, dz.$$

Dans la suite le noyau $K_n(x,y)$ sera appelé noyau itéré de $K(x,y)$.

Définition 1.2.10 ***(Noyau faiblement singulier)***

On appelle noyau faiblement singulier la fonction K continue sur $G \times G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ sauf peut être aux points $x = t$ et telle que,

$$\forall x, y \in G,\ x \neq t, \exists M > 0,\ |K(x,t)| < \frac{M}{|x-t|^{n-\alpha}},\ 0 < \alpha \leq n.$$

Proposition 1.2.4 *(voir [22])*

L'opérateur intégral A de $C(G)$ dans $C(G)$ à noyau faiblement singulier est un opérateur compact.

Définition 1.2.11 ***(Noyau dégénéré)***

On appelle noyau dégénéré une noyau de la forme

$$K(x,t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, b_i(t).$$

Proposition 1.2.5

Soit A un opérateur intégral à noyau dégénéré. L'image de A est de dimension finie.

1.2.6 Opérateur contractant

Définition 1.2.12

Soient H est un espace de Hilbert et T un opérateur borné, l'opérateur T est dit opérateur contractant s'il existe une constante L telle que $0 < L < 1$ et

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in H, \ \|T\varphi_1 - T\varphi_2\| \leq L \|\varphi_1 - \varphi_2\|.$$

Théorème 1.2.10 ***(principe de contraction de Banach)***

Soit T un opérateur contractant dans un espace de Hilbert H.

Alors, $T\varphi = \varphi$ admet une solution unique φ dans H, cette solution est le point fixe de cet opérateur.

Corollaire 1.2.3

Supposons que l'opérateur T admet un point fixe dans l'espace de Hilbert H, alors l'opérateur T^n, $n \in \mathbb{N}$ admet le même point fixe.

Corollaire 1.2.4

Soit T un opérateur dans l'espace H tel que l'opérateur T^n, $n \in \mathbb{N}$ est un opérateur contractant, alors T admet un unique point fixe φ dans l'espace H.

1.2.7 Opérateur de Nemytskii

Définition 1.2.13

On dit qu'une fonction $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, est une fonction de Carathédory si l'application $(x, s) \mapsto f(x, s)$ est continue en s et mesurable en x.

L'opérateur F défini par

$$(Fu)(x) = f(x, s)$$

est appelé opérateur de Nemytskii.

1.2.8 Opérateur de Hammerstein

Définition 1.2.14

La fonction f étant une fonction de Carathéodory, on suppose Ω compact et considère un noyau de Green G associé à la fonction f.

Alors, l'opérateur H défini par

$$(Hu)(x) = \int_{\Omega} G(x,y)\, f(y, u(y))\, dy$$

est appelé opérateur de Hammerstein.

Exemple 1.2.1

Si Ω est un domaine de $\mathbb{R}^n$, une solution u du problème

$$\begin{cases} \triangle u = f(x,u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

peut se mettre sous la forme intégrale

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x,y)\, f(y, u(y))\, dy,$$

où G est le noyau de Green.

1.2.9 Equations aux Opérateurs Compacts

Définition 1.2.15

L'équation définit par :

$$T\varphi = f$$

est dite une équation de première espèce.

Si l'équation est définit par :

$$\varphi - T\varphi = f$$

Cette équation est dite une équation de deuxième espèce.

où f est une fonction donnée et φ la fonction inconnue.

Remarque 1.2.2

Si $f = 0$, l'équation est une équation homogène.

Sinon cette équation est dite équation non-homogène.

Théorème 1.2.11

Soit A un opérateur compact d'un espace normé X dans lui- même, l'opérateur $T = I - A$ le noyau de l'opérateur T défini par,

$$KerT = N(T) = \{\varphi \in X; T\varphi = (I - A)\varphi = 0\},$$

est un sous espace fermé et de dimension finie.

Démonstration

En effet, le noyau $KerT$ d'un opérateur linéaire est sous espace vectoriel, de plus, soit $\varphi_n \in KerT$ une suite convergente vers la fonction φ alors, de la continuité de l'opérateur T, on obtient

$$T\varphi_n = 0 \Rightarrow T\varphi = 0.$$

D'où le noyau $KerT$ est fermé.

D'autres part, toute fonction $\varphi \in KerT$ satisfait l'équation $A\varphi = \varphi$; d'ou la restriction de l'opérateur A à l'ensemble $KerT$ coïncide avec l'indentité, A étant compact de X dans X il en est de même de $KerT$ dans $KerT$ et par conséquent $KerT$ est dimension finie car l'indentité ne peut être compact que un espace de dimension finie. ■

Théorème 1.2.12

La suite d'ensemble des noyaux

$$KerT,\ KerT^2, ...,\ KerT^n, ...$$

est une suite croissante stationnaire, Autrement dit, elle ne contient qu'un nombre fini d'ensembles distincts, c'est à dire il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que,

$$\{0\} \subset KerT \subset KerT^2 \subset ... \subset KerT^p = KerT^{p+1} = ...$$

Le nombre p est appelé le nombre de Riesz de l'opérateur compact A pour l'ensemble des noyaux $\{KerT^n\}$.

Théorème 1.2.13

L'image de l'opérateur T défini par :

$$\operatorname{Im}(T) = T(X) = \{\psi = T\varphi; \text{ telle que } \varphi \in X\}$$

est un sous espace fermé.

Théorème 1.2.14

La suite d'ensembles des images

$$\operatorname{Im}(T), \operatorname{Im}\left(T^2\right), ..., \operatorname{Im}(T^n), ...$$

est une suite décroissante et ne contient qu'un nombre fini d'ensembles distincts. Autrement dit, il existe un nombre $q \in \mathbb{N}$ tel que

$$... = \operatorname{Im}\left(T^{q+1}\right) = \operatorname{Im}(T^q) \subset ... \subset \operatorname{Im}\left(T^2\right) \subset \operatorname{Im}(T) \subset \operatorname{Im}\left(T^0\right) = X$$

Le nombre q est appelé le nombre de Riesz de l'opérateur compact A pour l'ensemble des images $\{\operatorname{Im}(T^n)\}$.

Preuve

Pour la preuve voir [22].

Lemme 1.2.1

Le nombre de Riesz p pour l'ensemble des noyaux $\{KerT^n\}$ et le nombre de Riesz q pour l'ensemble des images $\{\operatorname{Im}(T^n)\}$ sont égaux. Auterement dit

$$p = q.$$

Théorème 1.2.15

Les sous espaces $KerT^r$ et $\operatorname{Im}(T^r)$ sont supplémentaires. Autrement dit

$$X = KerT^r \oplus \operatorname{Im}(T^r)$$

où $r = p = q$ est le nombre de Riesz.

Théorème 1.2.16

Soit A un opérateur compact d'un espace normé X dans lui-même, alors pour que l'équation non homogène

$$T\varphi = \varphi - A\varphi = f \tag{1.2.1}$$

admette une solution unique $\varphi \in X$, pour tout $f \in X$, il faut et il suffit que l'équation homogène

$$T\varphi = \varphi - A\varphi = 0 \tag{1.2.2}$$

admette la solution triviale $\varphi = 0$.

Démonstration

En effet, supposons que l'équation (1.2.1) admette une solution pour tout $f \in X$, cela veut dire que l'opérateur T est surjectif et le nombre de Riesz $r = 0$. D'où l'injectivité de l'opérateur T. Autrement dit l'équation (1.2.2) admet la solution triviale $\varphi = 0$.

Réciproquement, supposons que l'équation (1.2.2) admette uniquement la solution triviale $\varphi = 0$, cela veut dire que l'opérateur T est injectif et le nombre de Riesz $r = 0$, D'où la surjectivité de l'opérateur T et par conséquent la bijectivité de cet opérateur. Autrement dit l'existente et l'unicité de la solution de l'équation (1.2.1). ■

Théorème 1.2.17

Soit A un opérateur compact d'un espace normé X dans lui-même, alors pour que l'équation homogène

$$\varphi - A\varphi = 0$$

admet un nombre fini de solutions linéairement indépendants $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$.

Alors, l'équation non homogène

$$\varphi - A\varphi = f$$

admet une solution $\varphi \in X$ de la forme

$$\varphi(x) = \psi(x) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i$$

où $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ sont arbitraires et ψ une solution particuliére de l'équation non homogène.

Approximation successive

Il est à remarquer que la somme partielle

$$\varphi_n = \sum_{k=0}^{n} A^k f$$

de la série de Neumann vérifie l'équation

$$\varphi_{n+1} = A\varphi_n + f, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

d'où la relation directe entre la série de Neumann et la théorie des approximations successives.

Théorème 1.2.18

Soit A un opérateur linéaire borné d'un espace de Banach E dans lui-même avec $\|A\| < 1$, et soit I l'opérateur identique dans E pour tout $f \in E$ l'approximation successive

$$\varphi_{n+1} = A\varphi_n + f,$$

avec φ_0 un vecteur arbitraire de E converge vers une unique solution φ de l'équation

$$\varphi - A\varphi = f.$$

Démonstration

Il est aisé de voir que de la relation précédente, on a

$\varphi_0 = f$

$\varphi_1 = A\varphi_0 + f = Af + f$

$\varphi_2 = A\varphi_1 + f = A^2 f + Af + f$

...

$\varphi_{n+1} = A\varphi_n + f = A\sum_{k=0}^{n} A^k f + f = A^{n+1} f + \sum_{k=0}^{n} A^k f.$

D'où

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(A^{n+1} f + \sum_{k=0}^{n} A^k f \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} A^k f = \sum_{k=0}^{\infty} A^k f$$

$$= (I - A)^{-1} f. \quad \blacksquare$$

Chapitre 2

GÉNÉRALITÉS SUR LES ÉQUATIONS INTÉGRALES

2.1 INTRODUCTION

Définition 2.1.1

On appelle équation integrale une équation fonctionnelle où la fonction inconnue figure sous le singe d'intégrations $\int$.

C'est on générale l'équation par rapport à l'inconnue φ de la forme

$$\int_E K(x, t, \varphi(t))\, dt = \lambda\varphi(x) + f(x), \; x \in E \tag{2.1.1}$$

où E est un espace mesuré, $f(x)$ une fonction mesurable donnée sur E, λ un scalaire donné qui peut être réel ou complexe, et K une fonction mesurable sur E^3 appelée noyau de l'équation intégrale.

Avec toutes ces données, notre problème est de chercher la fonction φ qui satisfait l'équation (2.1.1).

Remarque 2.1.1

i) Si on prend

$$K(x,t,\varphi(t)) = K(x,t)\,\varphi(t)\,,$$

l'équation (2.1.1) devient linéaire, est sinon devient équation intégrale non linéaire.

ii) Le type le plus général d'une équation intégrale est

$$h(x)\,\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_E K(x,t,\varphi(t))\,dt.$$

La fonction $h(x)$ détermine le type de l'équation.

iii) Notons que l'équation peut être écrite sous forme d'opérateur

$$T\varphi = \lambda\varphi + f$$

où l'opérateur T s'ecrit comme

$$T\varphi(x) = \int\limits_E K(x,t,\varphi(t))\,dt.$$

Lemme 2.1.1 *(voir [14])*

Soit K une fonction de l'éspace $L^2(]a,b[\times]a,b[)$, alors l'opérateur T défini par

$$T\varphi(x) = \int\limits_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt,\ \ x \in]a,b[$$

est bien défini, en tant qu'opérateur de $L^2(]a,b[)$ dans lui-même.

Lemme 2.1.2 *(voir [14])*

Soit $K \in L^2(]a,b[\times]a,b[)$. L'opérateur intégral T de noyau K est compact de $L^2(]a,b[)$ dans lui-même.

Proposition 2.1.1

On définit la norme du noyau $K(x,y)$ pour p et q conjugués, avec $1 \leq p,q \leq \infty$ par

$$\|K\|_p = \begin{cases} \left[\int\limits_E \left(\int\limits_E |K(x,t)|^q \, dt\right)^{\frac{p}{q}} dx\right]^{\frac{1}{p}} & \text{pour } 1 < \ p < \infty \\ \int\limits_E ess \sup\limits_t |K(x,t)| \, dx & \text{pour } p = 1 \\ ess \sup\limits_x \int\limits_E |K(x,t)| \, dt & \text{pour } p = \infty \end{cases}$$

si on suppose que cette norme est finie

$$\|K\|_p < \infty. \tag{2.1.2}$$

Alors, l'opérateur intégral T de noyau $K(x,y)$ envoie $L_p(E)$ dans $L_p(E)$ de plus, on a

$$\|T\varphi\|_p \leq \|K\|_p \|\varphi\|_p$$

Preuve

· Cas où $1 < p < \infty$, l'inégalité de Hölder, nous donne

$$\int\limits_E \left(\int\limits_E |K(x,t)| \, |\varphi(t)| \, dt\right)^p dx \leq \int\limits_E \left[\left(\int\limits_E |K(x,t)|^q \, dt\right)^{\frac{p}{q}} \|\varphi\|_p^p\right] dx = \|K\|_p^p \|\varphi\|_p^p$$

ce qui implique que l'opérateur $T\varphi(x) = \int\limits_E K(x,t)\,\varphi(t)\,dt$, existe presque partout, avec

$$\|T\varphi\|_p \leq \|K\|_p \|\varphi\|_p.$$

· Cas où $p = 1$, on a

$$\int\limits_E \int\limits_E |K(x,t)| \, |\varphi(t)| \, dtdx \leq \int\limits_E ess \sup\limits_t |K(x,t)| \, dx \int\limits_E |\varphi(t)| \, dt.$$

d'où

$$\|T\varphi\|_1 \leq \|K\|_1 \|\varphi\|_1.$$

· Cas où $p = \infty$, on a

$$ess\sup_x |T\varphi(x)| = ess\sup_x \left| \int_E K(x,t)\,\varphi(t)\,dt \right|$$

$$\leq ess\sup_t |\varphi(t)|\, ess\sup_x \int_E |K(x,t)|\,dt$$

d'où

$$\|T\varphi\|_\infty \leq \|K\|_\infty \|\varphi\|_\infty . \quad \blacksquare$$

Remarque 2.1.2

Pour $p = 2$, la conditions (2.1.2) devient

$$\int_E \int_E |K(x,t)|^2\, dxdt < \infty.$$

2.2 CLASSIFICATION DES EQUATIONS INTEGRALES

2.2.1 EQUATIONS INTEGRALES LINEAIRES

Définition 2.2.1 ***(Equation intégrale de Fredholm)***

On appelle équation intégrale de Fredholm une équation, à une inconnue $\varphi(x)$ de la forme

$$h(x)\,\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{2.2.1}$$

où $f(x)$, $K(x,t)$ sont des fonctions connues et λ est un paramètere non nul, réel ou complexe.

La fonction $h(x)$ détermine le type de l'équation intégrale.

i) Si $h(x) = 0$, l'équation (2.2.1) s'écrit

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt = 0. \tag{2.2.2}$$

et s'appelle équation intégrale de Fredholm de première espèce.

ii) Si $h(x) = u$ =constante $\neq 0$, l'équation (2.2.1) s'écrit

$$u\varphi(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt. \tag{2.2.3}$$

et s'appelle équation intégrale de Fredholm de seconde espèce.

iii) Si $h(x) \neq 0$, donc la formule (2.2.1) est appelée équation intégrale de Fredholm de troisième espèce.

Remarque 2.2.1

1· Si $f(x) = 0$, l'équation (2.2.1) est dite homogène.

2· Si $f(x) \neq 0$, l'équation (2.2.1) est dite non homogène.

Définition 2.2.2 ***(Equation intégrale de Volterra)***

On appelle équation intégrale linéaire de Volterra, une équation de la forme

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^x K(x,t)\varphi(t)\,dt. \tag{2.2.4}$$

i) On appelle équation intégrale de Volterra de première espèce, si $h(x) = 0$, donc l'équation (2.2.4) s'écrit

$$f(x) + \lambda\int_a^x K(x,t)\varphi(t)\,dt = 0. \tag{2.2.5}$$

ii) On appelle équation intégrale de Volterra de seconde espèce, si $h(x) = u$ =constante $\neq 0$, donc l'équation (2.2.4) s'écrit

$$u\varphi(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)\varphi(t)\,dt. \tag{2.2.6}$$

iii) Si $h(x) \neq 0$, donc la formule (2.2.4) est appelée équation intégrale de Volterra de troisième espèce.

Remarque 2.2.2

1· Si $f(x) = 0$, donc l'équation (2.2.4) est dite homogène.

2· Si $f(x) \neq 0$, donc l'équation (2.2.4) est dite non homogène.

Remarque 2.2.3

L'équation intégrale de Volterra est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm, il suffit de prendre le noyau K vérifie la condition

$$K(x,t) = 0, \text{ pour } x < t.$$

Définition 2.2.3 ***(Equation intégrale de Wiener-Hoph)***

On appelle équation intégrale de Wiener-Hoph une équation de la forme

$$h(x)\varphi(x) + \lambda\int_a^{\infty} K(x-t)\varphi(t)\,dt = f(x). \tag{2.2.7}$$

Définition 2.2.4 ***(Equation intégrale de Renwal)***

L'équations intégrales de la forme

$$h(x)\varphi(x) + \lambda\int_a^{x} K(x-t)\varphi(t)\,dt = f(x). \tag{2.2.8}$$

sont appelées équation intégrale de Renwal.

Définition 2.2.5 ***(Equation intégrale d'Abel)***

On appelle équation intégrale linéaire d'Abel une équation de la forme

$$\int_a^{x} \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt = f(x). \tag{2.2.9}$$

.

où α est une constante, $0 < \alpha < 1$.

2.2.2 EQUATIONS INTEGRALES NON LINEAIRES

Définition 2.2.6 ***(Equation intégrale de Fredholm)***

L'équation intégrale non linéaire de Fredholm de première espèce prendre la forme

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t, \varphi(t))\, dt = 0. \tag{2.2.10}$$

est appelée équation intégrale de Fredholm de second espèce, de la forme

$$u\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t, \varphi(t))\, dt. \tag{2.2.11}$$

où u =constante $\neq 0$,

et troisième espèce, de la forme

$$h(x)\, \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t, \varphi(t))\, dt. \tag{2.2.12}$$

Définition 2.2.7 ***(Equation intégrale de Volterra)***

L'équation intégrale non linéaire de Volterra de première espèce prendre la forme

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, \varphi(t))\, dt = 0. \tag{2.2.13}$$

est appelée équation intégrale de Volterra de second espèce, de la forme

$$u\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, \varphi(t))\, dt. \tag{2.2.14}$$

et troisième espèce, de la forme

$$h(x)\, \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, \varphi(t))\, dt. \tag{2.2.15}$$

Remarque 2.2.4

1· Si $f(x) = 0$, donc l'équation est dite homogène.

2· Si $f(x) \neq 0$, donc l'équation est dite non homogène.

Définition 2.2.8 ***(Equation intégrale de Hammerstein)***

On appelle équation intégrale de Hammerstein une équation de la forme

$$h(x)\varphi(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) F(t, \varphi(t))\, dt = f(x). \tag{2.2.16}$$

Définition 2.2.9 ***(Equation intégrale de Hammerstein-Volterra)***

On appelle équation intégrale de Hammerstein-Volterra une équation de la forme

$$h(x)\varphi(x) + \lambda \int_a^x K(x,t) F(t, \varphi(t))\, dt = f(x). \tag{2.2.17}$$

Définition 2.2.10 ***(Equation intégrale d'Abel)***

On appelle équation integrale d'Abel une équation de la forme

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^x (x-t)^{\alpha-1} g(\varphi(t))\, dt. \tag{2.2.18}$$

où $0 < \alpha < 1$ et $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ tel que : $g(0) = 0$ et $g(x) > 0$.

Définition 2.2.11 ***(Equation intégrale de Lalesco)***

On appelle équation intégrale de Lalesco une équation de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x \left[K_1(x,t)\varphi(t) + K_2(x,t)\varphi^2(t) + \cdots K_n(x,t)\varphi^n(t)\right] dt. \tag{2.2.19}$$

Définition 2.2.12 ***(Equation intégrale de Bratu)***

L'équation intégrale non linéaire de Bratu prendre la forme:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b G(x,t)\, e^{\varphi(t)} dt. \tag{2.2.20}$$

b est un nombre positif donné et $G(x,t)$ désigne la fonction de Green

$$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{(b-x)(t-a)}{b-a}, \ t \leq x \\ \dfrac{(b-t)(x-a)}{b-a}, \ t \geq x \end{cases}$$

Proposition 2.2.1 *(voir* [5]*)*

Le solution de (2.2.20) comme solution l'équation $\dfrac{d^2\varphi}{dt^2} + \lambda e^{\varphi} = 0, \ \ \varphi(a) = \varphi(b) = 0.$

Théorème 2.2.1 ***(Théorème de Bratu)***

Pour chaque valeur de λ comprise entre 0 et $\lambda_1 = \dfrac{(1,8745...)^2}{b^2}$, l'équation (2.2.20) a deux solutions réelles et distinctes.

Preuve

Voir [5] et [8]

2.2.3 EQUATIONS INTEGRALES MIXTES

Définition 2.2.13 ***(Equation intégrale de Fredholm-Volterra)***

On appelle équation intégrale de Fredholm-Volterra une équation de la forme

$$h(x)\varphi(x,t) + \lambda \int_a^b K(x,y)\varphi(y,t)\,dy + \lambda \int_0^t F(t,s)\varphi(x,s)\,ds = f(x,t), \quad t \in [0,T], T < \infty. \tag{2.2.21}$$

La fonction h détermine le type de l'équation intégrale.

Définition 2.2.14 ***(Equation intégrale deVolterra-Fredholm)***

On appelle équation intégrale deVolterra- Fredholm une équation de la forme

$$h(x)\varphi(x,t)+\int_0^t\int_a^b K(x,t)F(t,s)\varphi(y,s)\,dyds=f(x,t)\,,\quad t\in[0,T]\,,T<\infty. \qquad (2.2.22)$$

Définition 2.2.15 ***(Equation intégrale non linéaire de Hammerstein- Volterra)***

On appelle équation intégrale non linéaire de Hammerstein- Volterra une équation de la forme

$$h(x)\varphi(x,t)=f(x,t)+\int_a^b K(x,y)\Psi(y,\varphi(y,t))\,dy+\int_0^t F(t,s)\varphi(x,s)\,ds,\quad t\in[0,T]\,,T<\infty \qquad (2.2.23)$$

2.2.4 EQUATIONS INTEGRALES SINGULIERS

Définition 2.2.16

On dit qu'une équation intégrale est singulière si l'une ou le deux limites de l'intégrale sont infinies, par exemple;

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^\infty \sin(xt)\varphi(t)\,dt,$$

ou bien le noyau devient infini au voisinage des points de l'intégrale, par exemple;

$$f(x)=\int_0^x \frac{H(x,t)}{(x-t)^\alpha}\varphi(t)\,dt.$$

Singularité de type Volterra ou Fredholm

On considère l'équation intégrale de deuxième espèce de la forme

$$\varphi(x)=f(x)+\int_a^x M(x,t)K(x,t)\varphi(t)\,dt,a\leq x<\infty. \qquad (2.2.24)$$

où $K(x,y)$ est faiblement singulier, en général

$$K(x,y) = \begin{cases} |x-t|^{-\alpha}, \ 0 < \ \alpha < 1 \\ \log|x-t| \end{cases}$$

Alors

i) L'équation (2.2.24) est de Volterra.

ii) Si $x = b$, l'équation (2.2.24) est de Fredholm.

iii) Le cas où $K(x,y) = |x-t|^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$ s'appelle singularité algébrique.

iv) Le cas où $K(x,y) = \log|x-t|$, s'appelle singularité logarthmique.

Définition 2.2.17 ***(Equation intégrale de Carleman)***

On appelle équation intégrale de Carleman une équation de la forme

$$p(x)\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)}{t-x}dt + \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{q(t)}{t-x}\varphi(t)\,dt = f(x). \tag{2.2.25}$$

où p et q sont des fonctions continues.

Définition 2.2.18 ***(Singularité de type de Cauchy)***

Soit D un domaine borné et connexe dans un plan complexe, alors l'intégrale de Cauchy est donné par la formule

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{\varphi(t)}{t-x}dt = f(x), \ t \in \mathbb{C}. \tag{2.2.26}$$

Définition 2.2.19

On appelle équation intégrale de Cauchy une équation de la forme

$$a(x)\varphi(x) + b(x)\int_{\Gamma}\frac{\varphi(t)}{x-t}dt + \int_{\Gamma}K(x,t)\varphi(t)\,dt = f(x). \tag{2.2.27}$$

telle que $\Gamma = \partial D$.

2.3 Liaison entre les équations différentielles linéaires et les équations intégrales de Volterra

Réduction d'une équation différentielle à une équation intégrale. Parfois il y a intérêt à réduire la résolution d'une équation différentielle à la résolution d'une équation intégrale.

La résolution de l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n(x)\,y = F(x)$$

à coefficient continus $a_i(x)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ avec les conditions intiales

$$y(0) = C_0,\ y^{'}(0) = C_1, \cdots, y^{n-1}(0) = C_{n-1}$$

peut être ramenée à la résolution d'une équation intégrale de Volterra de seconde espèce. Illustrons notre affirmation sur l'exemple de l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)\,y = F(x),$$

$$y(0) = C_0, y^{'}(0) = C_1.$$

Posons

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi(x).$$

D'où, vu les conditions initiales, on obtient successivement

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(t)\,dt + C_1,\ y = \int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt + C_1 x + C_0$$

Nous avons utilisé la formule

$$\underbrace{\int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x dx \cdots \int_{x_0}^x f(x)dx}_{n} = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^x (x-z)^{n-1} f(z)\,dz.$$

Compte tenu de mettons l'équation différentielle sous la forme

$$\varphi(x) + \int_0^x a_1(x)\varphi(t)\,dt + C_1 a_1(x) + \int_0^x a_2(x)(x-t)\varphi(t)\,dt + C_1 x a_2(x) + C_0 a_2(x) = F(x)$$

ou

$$\varphi(x) + \int_0^x [a_1(x) + a_2(x)(x-t)]\,\varphi(t)\,dt = F(x) - C_1 a_1(x) - C_1 x a_2(x) - C_0 a_2(x).$$

Posant

$K(x,t) = -[a_1(x) + a_2(x)(x-t)]$, $f(x) = F(x) - C_1 a_1(x) - C_1 x a_2(x) - C_0 a_2(x)$,

nous ramenons l'équation à la forme suivante

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt.$$

i.e. nous obtenous une équation intégrale de Volterra de seconde espèce.

Exemple 2.3.1

Soit l'équation différentielle

$$y'' + xy' + y = 0,$$

et aux conditions initiales

$$y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

Posons

$$y'' = \varphi(x).$$

Alors

$$y' = \int_0^x \varphi(t)\,dt + y'(0) \Longrightarrow y = \int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt + 1.$$

Portons dans l'équation différentielle donnée, il vient

$$\varphi(x) + \int_0^x x\varphi(t)\,dt + \int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt + 1 = 0$$

ou

$$\varphi(x) = -1 - \int_0^x (2x-t)\,\varphi(t)\,dt$$

Remarque 2.3.1

Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

qui peut être converti à l'équation intégrale non linéaire

$$y = y_0 + \int_0^x f(t,y)\,dt$$

2.4 Existence et unicité de la solution de l'équation intégrale linéaire de Volterra

On considère l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt \tag{2.4.1}$$

où $K(x,t)$ est une fonction continue pour $0 \le x \le a$, $0 \le t \le x$, et $f(x)$ est continue lorsque $0 \le x \le a$.

Définition 2.4.1 ***(Résolvante d'une équation intégrale)***

On appelle résolvonte de l'équation intégrale, toute fonction $R(x,t;\lambda)$ donnée par

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x,t).$$

où les K_n sont les noyaux itérés définis par la relation de récurrence suivante

$$K_1(x,t) = K(x,t), \quad K_n(x,t) = \int_t^x K(x,s) K_{n-1}(s,t)\, ds.$$

Lemme 2.4.1

La résolvante $R(x,t;\lambda)$ vérifie l'équation suivante

$$R(x,t;\lambda) = K(x,t) + \lambda \int_t^x K(x,s) R(s,t;\lambda)\, ds.$$

Théorème 2.4.1 *(voir* [17]*)*

Soit $K(x,t)$ est une fonction continue pour $0 \leq x \leq a$, $0 \leq t \leq x$, et $f(x)$ est continue lorsque $0 \leq x \leq a$.

L'équation (2.4.1) admet une solution unique et continue donnée par la formule

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x R(x,t;\lambda) f(t)\, dt.$$

Remarque 2.4.1

Le théorème 2.4.1 reste vrai pour les équation intégrale de Fredholm de seconde espèce.

Théorème 2.4.2

Soit l'équation intégrale de Volterra de première espèce

$$\int_a^x K(x,t)\varphi(t)\, dt = f(x) \tag{2.4.2}$$

telles que f, K des fonctions continues, dérivables sur $[a, b]$,

$$K(x,x) \neq 0 \text{ et } \int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 \, dx dt < \infty.$$

Alors, il existe une solution unique et continue de l'équation (2.4.2).

Preuve

On remarque d'abord qu'on

$$f(a) = \int_a^a K(x,t)\,\varphi(t)\,dt = 0$$

L'équation (2.4.2) peut être transformée en une équation de Volterra de deuxième espèce en utilisant la règle de Leibniz

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_a^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt = K(x,x)\,\varphi(x) + \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} K(x,t)\,\varphi(t)\,dt = f^{'}(x)$$

comme $K(x,x) \neq 0$, alors

$$\varphi(x) = \frac{f^{'}(x)}{K(x,x)} - \int_a^x \frac{K_x^{'}(x,t)}{K(x,x)}\varphi(t)\,dt$$

qui est une équation de Volterra de deuxième espèce, et par le théorème 2.4.1 on obtient l'existence et l'unicité de la solution φ. ■

2.5 Existence et unicité de la solution de l'équation intégrale non linéaire de Volterra

Théorème 2.5.1

Soit l'équation intégrale non linéaire de Volterra suivante :

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t,\varphi(t))\,dt, \qquad 0 \leq x < +\infty. \tag{2.5.1}$$

Suppossons que les conditions suivantes sont vérifiées :

i) $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est continue.

ii) $K : [0, +\infty[\times [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, est une fonction continue satisfait la condition Lipschitz suivante :

$$|K(x,t,u) - K(x,t,v)| \leq L|u-v|, \text{ tel que } x,t \in [0,+\infty[\text{ et } u,v \in \mathbb{R}.$$

Alors, l'équation (2.5.1) admet une solution unique $\varphi \in C([0,+\infty[,\mathbb{R})$.

Preuve

On choisit la norme suivante

$$|g| = \sup_x \{|g(x)| \exp(-Lx)\}$$

On définit l'opérateur T comme suit :

$$T\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t,\varphi(t))\, dt$$

A fin de prouver que l'équation (2.5.1) admet une solution, il faut montrer que l'opérateur T admet un point fixe.

D'abord, on montre que T est contractante.

$$|T\varphi(x) - T\psi(x)| \leq \sup_x \left\{ \exp(-Lx) \int_0^x |K(x,t,\varphi(t)) - K(x,t,\psi(t))|\, dt \right\}$$

$$\leq L \sup_x \left\{ \exp(-Lx) \int_0^x |\varphi(t) - \psi(t)|\, dt \right\}$$

$$\leq L \sup_x \left\{ \exp(-Lx) \int_0^x \exp(-Lt)\exp(Lt)\, |\varphi(t) - \psi(t)|\, dt \right\}$$

$$\leq L|\varphi - \psi| \sup_x \left\{ \exp(-Lx) \int_0^x \exp(Lt)\, dt \right\}$$

$$\leq L|\varphi - \psi| \sup_x \left\{ \exp(-Lx) \frac{\exp(Lx) - 1}{L} \right\}$$

$$\leq (1 - \exp(-Lx)) |\varphi - \psi| .$$

Puisque

$$(1 - \exp(-Lx)) < 1,$$

alors, T est contractante, d'après le principe de Banach l'opérateur T admet un point fixe unique $\varphi \in C([0, +\infty[)$, qui est une solution unique de l'équation intégrale (2.5.1). ■

2.6 Méthodes de résolution approchée des équations intégrales non linéaires

Méthode des approximations successives

La méthode des approximations successives peut, a priori, être appliquée tous les problèmes non linéaires.

On considère l'équation intégrale non linéaire de Volterra

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x F(x, t, \varphi(t))\, dt \tag{2.6.1}$$

nous cherchons la solution de (2.6.1) sous forme de limite de la suite $\{\varphi_n(x)\}$, où par exemple $\varphi_0(x) = f(x)$ et les termes suivants $\varphi_k(x)$ se calculent de proche en proche d'après la formule

$$\varphi_k(x) = f(x) + \int_0^x F\big(x, t, \varphi_{k-1}(t)\big)\, dt, \ \ k = 1, 2, ..., n. \tag{2.6.2}$$

Si $f(x)$ et $F(x, t, z)$ sont de carré sommable et satisfont aux conditions

$$|F(x, t, z_2) - F(x, t, z_1)| \leq a(x, t) |z_2 - z_1| , \quad \left| \int_0^x F(x, t, \varphi(t))\, dt \right| \leq \eta(x) , \tag{2.6.3}$$

avec $a(x, t)$ et $\eta(x)$ tels qu'on ait dans le domaine fondamental $(0 \leq t \leq x \leq a)$:

$$\int_0^a \eta^2(x)\,dx \le N^2, \quad \int_0^a dx \int_0^x a^2(x,t)\,dt \le A^2.$$

Alors, l'équation intégrale non linéaire de Volterra de seconde espèce (2.6.1) possède une solution et une seule, à savoir $\varphi(x) \in L_2(0,a)$, définie comme la limite de $\varphi_n(x)$ lorsque $n \to \infty$:

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x).$$

les fonctions $\varphi_n(x)$ étant calculées par les formules de récurrence (2.6.2).

On peut prendre pour $\varphi_0(x)$ n'importe quelle fonction de $L_2(0,a)$ (en particulier, une fonction continue) qui remplit la condition (2.6.3).

Notons qu'un bon choix de l'approximation initiale est susceptible de faciliter la résolution de l'équation.

Exemple 2.6.1

On utilise la technique des approximations successives pour résoudre l'équation intégrale

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{1+\varphi^2(t)}{1+t^2}\,dt.$$

en prenant pour approximation initiale $\varphi_0(x) = x$.

On a alors

$$\varphi_1(x) = \int_0^x \frac{1+t^2}{1+t^2}\,dt = x$$

on truove de même

$$\varphi_n(x) = x, \ (n = 2, 3, ...).$$

La suite $\{\varphi_n(x)\}$ est donc une suite stationnaire $\{x\}$ tendant vers $\varphi(x) = x$.

On obtient de suite la solution

$$\varphi(x) = x$$

de l'équation intégrale donnée.

Chapitre 3

L'EXISTENCE DES SOLUTIONS D'EQUATIONS INTEGRALES DE Hammerstein ET Hammerstein-Volterra

3.1 INTRODUCTION

3.1.1 Position du problème

Dans ce chapitre nous étudions l'existence des solutions d'équation intégrale non linéaire de type Hammerstein dans $L^p([a,b])$,

$$\varphi(t) = g(t) + \int_a^b K(t,s) f(s,\varphi(s))\, ds, \quad -\infty < a \leq t \leq b < +\infty. \tag{3.1.1}$$

Un intérêt particulier est consacré au cas où le noyau $K(.,.)$ satisfait à la condition

$$K(t,s) = 0, \quad \text{pour } a \leq t \leq s \leq b,$$

dans ce cas, l'équation (3.1.1) est réduit à l'équation de Hammerstein-Volterra suivante

$$\varphi(t) = g(t) + \int_a^t K(t,s) f(s, \varphi(s))\, ds, \quad -\infty < a \leq t \leq b < +\infty. \tag{3.1.2}$$

Nous avons étudié quelques résultats d'existence et l'uncité de la solution de (3.1.2) dans $C([a,b])$.

On considère l'opérateur T défini par :

$$T\varphi(t) = g(t) + \int_a^b K(t,s) f(s, \varphi(s))\, ds, \ \forall t \in [a,b]. \tag{3.1.3}$$

On applique la théorie du point fixe sur l'opérateur T sous des conditions donneés sur l'opérateur et sur domaine, afin d'assurer l'existence du point fixe.

A fin de prouver que l'équation admet une solution, il faut montrer que l'opérateur T admet un point fixe.

3.1.2 Théorèmes de point fixe

En analyse, les théorèmes de point fixe sont un résultat qui permet d'affirmer qu'une fonction f admet sous certaines conditions un point fixe. Ces théorèmes se révélent être des outils très utiles en mathématiques, principalement dans le domaine de la résolution des équations différentielles.

Le théorème du point fixe de Banach donne un critère général dans les espaces métriques complets pour assurer que le procédé d'itération d'une fonction tend vers un point fixe.

Théorème 3.1.1 ***(Théorème du point fixe de Schauder)***

Soit K un sous-ensemble convexe, fermé, borné, non vide d'un espace de Banach X et $T : K \longrightarrow K$ est un opérateur continu et $T(K)$ relativement compact.

Alors, T admet au moins un point fixe.

Preuve

Pour la preuve voir [12].

Théorème 3.1.2

Soit B une boule ouverte d'un espace de Banach X et $T : B \longrightarrow B$ est compact et continu, alors T a un point fixe.

Théorème 3.1.3 ***(Théorème du point fixe de Schaefer)***

Soit X un espace de Banach et $T : X \longrightarrow X$ est un opérateur complètement continu. On a alors l'alternative suivante :

i) Ou bien, l'équation opérateur $x = \lambda Tx$ admet une solution pour $\lambda = 1$.

ii) Ou bien, l'ensemble $S = \{x \in X : x = \lambda Tx,\ \lambda \in]0,1[\}$ est non borné.

3.1.3 Résultats de compacité

Dans le cas particulier où $X = C([a,b])$, le théorème d'Arzela-Ascoli est généralement utilisé pour prouve la compacité de T.

En utilisant certaines conditions sur les fonctions $g(\cdot)$ et $f(\cdot,\cdot)$ en combinant le théorème d'Arzelz-Ascoli avec un résultat densité L^p, nous prouvons la compacité de l'opérateur T dans $L^p([a,b])$, $p \geq 1$.

Théorème 3.1.4

Soit G un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, et $f : G \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonction satisfaisante les conditions de Carathéodory.

Supposons que f vérifie la condition suivante

$$|f(x,u)| \leq |a(x)| + c\,|u|^{\frac{p}{q}}, \quad \forall u \in \mathbb{R} \text{ et } p.p.\ x \in G. \tag{3.1.4}$$

où $a \in L^q(G,\mathbb{R})$, et $c \in \mathbb{R}^+$.

Alors, l'opérateur défini par

$$(Fu)(x) = f(x,u(x)), \quad u \in L^p(G,\mathbb{R}) \text{ et } p.p.\ x \in G.$$

est borné et continu de l'espace $L^p(G)$ dans $L^q(G)$.

Preuve

On déduit de l'hypothèse (3.1.4) la majoration suivante

$$|f(x,u(x))|^q \leq \left(|a(x)| + c\,|u|^{\frac{p}{q}}\right)^q$$

et donc

$$\|Fu\|_q = (\int\limits_G |f(x,u(x))|^q\,dx)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int\limits_G \left(|a(x)| + c\,|u|^{\frac{p}{q}}\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

Par l'inégalité de Minkowski, il vient

$$\|Fu\|_q \leq (\int\limits_G |a(x)|^q\,dx)^{\frac{1}{q}} + (\int\limits_G c^q\,|u|^p\,dx)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \|a\|_q + c(\int\limits_G |u|^p\,dx)^{\frac{1}{q}}$$

on obtient

$$\|Fu\|_q \leq \|a\|_q + c\left(\|u\|_p\right)^{\frac{p}{q}} < \infty.$$

Donc, l'opérateur F est borné.

Pour montrer la continuité de F, on considère une suite (u_n) convergente vers u dans $L^p(G)$; elle admet une sous-suite (u_{n_k}) convergente *p.p.* dans G vers u, et il existe $\bar{u} \in L^p(G)$ telle que $|u_{n_k}(x)| \leq |\bar{u}(x)|$ *p.p.* $x \in G$. La fonction f étant continue en la seconde variable, $f(x, u_{n_k}(x))$ converge, quand $k \longrightarrow \infty$, vers $f(x,u(x))$ *p.p.*$x \in G$.

De plus, grâce à l'inégalité dans l'inégalité (1.1.4), on obtient les estimations suivantes

$$\|Fu_{n_k} - Fu\|_q^q = \int\limits_G |f(x,u_{n_k}(x)) - f(x,u(x))|^q\,dx$$

$$\leq \int\limits_G (|f(x,u_{n_k}(x))| + |f(x,u(x))|)^q\,dx$$

$$\leq 2^{q-1}\int\limits_G (|f(x,u_{n_k}(x))|^q + |f(x,u(x))|^q)\,dx$$

$$\leq 2^{q-1} \int_G \left\{ \left(|a(x)| + c\,|u_{n_k}|^{\frac{p}{q}} \right)^q + \left(|a(x)| + c\,|u|^{\frac{p}{q}} \right)^q \right\} dx$$

$$\leq 2^{q-1} \left\{ 2 \int_G |a(x)|^q \, dx + c^q \left(\int_G |u|^p \, dx + \int_G |u_{n_k}|^p \, dx \right) \right\}$$

$$\leq C \left(\|a\|_q^q + \|u\|_p^p + \|u_{n_k}\|_p^p \right) \leq C'.$$

où C et C' sont deux constantes indépendantes de n.

De plus,

$$\|Fu_{n_k}\|_q \leq \|Fu\|_q + \|Fu_{n_k} - Fu\|_q .$$

La suite (Fu_{n_k}) est donc bornée indépendamment de n dans $L^q(G)$. En vertu du théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on obtient finalement de convergence dans $L^q(G)$ de la suite (Fu_{n_k}) vers Fu. ■

Lemme 3.1.1

Sous les conditions ci-dessus, soit $p \geq 1$ un nombre réel et soit $q \in [1, +\infty]$ le conjugué de p. Supposons que l'opérateur F satisfait la condition suivante,

$$\forall u \in L^P([a,b]), \quad Fu \in L^q([a,b]).$$

Alors, F est un opérateur continu de $L^P([a,b])$ dans $L^q([a,b])$.

En outre, il existe une constante $C > 0$ et $h \in L^q([a,b])$ telle que

$$|f(x,u)| \leq C\,|u|^{p-1} + |h(x)|, \forall x \in [a,b], \forall u \in \mathbb{R}.$$

Théorème 3.1.5

On considère l'opérateur T donné par (3.1.3), et soit $p \geq 1$ et q le conjugué de p. Supposons que $g \in L^p([a,b])$, et qu'il existe une constante positive C et fonction $h \in L^q([a,b])$, telle que

$$|f(x,u)| \leq C\,|u|^{p-1} + |h(x)|, \ \forall x \in [a,b], \forall u \in \mathbb{R}. \tag{3.1.5}$$

Supposons que le noyau $K(\cdot,\cdot) \in L^p\left([a,b]^2\right)$.

Alors, $\forall u \in L^p([a,b])$, $Tu \in L^p([a,b])$, et T est un opérateur compact.

Preuve

Nous avons écrit l'opérateur T de la forme : $T = T_1 + T_K$, tel que

$$T_1(u)(t) = g(t), \quad T_K(u)(t) = \int_a^b K(t,s) f(s,u(s))\, ds, t \in [a,b].$$

Il est clair que T_1 est un opérateur compact sur $L^p([a,b])$. Ainsi, pour prouver que T est compact, il suffit de prouver que $T_K : L^P([a,b]) \longrightarrow L^P([a,b])$ est compact.

Notez qu'à partir de (3.1.5), on conclut que si $u \in L^p([a,b])$, alors la fonction $s \longrightarrow f(s,u(s))$ appartient à $L^q([a,b])$.

Soit $u \in L^p([a,b])$, puis en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}\|T_K(u)\|_p^p = \int_a^b \left| \int_a^b K(t,s) f(s,u(s))\, ds \right|^p dt &\leq \int_a^b \int_a^b |K(t,s)|^p\, ds \left[\int_a^b |f(s,u(s))|^q\, ds \right]^{\frac{p}{q}} dt \\ &\leq \|K\|_p^p \left(\left\| C\,|u(s)|^{p-1} + h(s) \right\|_q \right)^p \\ &\leq \|K\|_p^p \left(C \left(\|u\|_p \right)^{p-1} + \|h\|_q \right)^p .\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$\|T_K(u)\|_p \leq \|K\|_p \left(C \left(\|u\|_p \right)^{p-1} + \|h\|_q \right) < +\infty.$$

Alors, $\forall u \in L^P([a,b])$, on obtient $T_K u \in L^p([a,b])$.

La preuve de la compacité de T, est effectué par les deux étapes suivantes.

Première étape

Dans cette étape, nous supposons que $K(t,s) \in C\left([a,b]^2\right)$ et nous montrons que :

$$T_K : L^P([a,b]) \longrightarrow C([a,b])$$

est compact.

Nous montrons d'abord que $T_K(L^p([a,b])) \subset C([a,b])$.

Soit $u \in L^p([a,b])$ et t, $t_0 \in [a,b]$, il est clair que

$$|T_K u(t) - T_K u(t_0)| \leq \int_a^b |K(t,s) - K(t_0,s)| \left(C|u(s)|^{p-1} + |h(s)|\right) ds$$

$$\leq \sup_{s\in[a,b]} |K(t,s) - K(t_0,s)| \int_a^b \left(C|u(s)|^{p-1} + |h(s)|\right) ds$$

$$\leq \sup_{s\in[a,b]} |K(t,s) - K(t_0,s)| (b-a)^{\frac{1}{p}} \left(C\left(\|u\|_p\right)^{p-1} + \|h\|_q\right).$$

Comme $K(\cdot,\cdot)$ est uniformément continu sur $[a,b]^2$, alors l'inégalité précédente implique que $T_K u \in C([a,b])$.

Ensuite, soit $S = \{(u_n)_n, n \in \mathbb{N}\}$ un ensemble borné de $L^P([a,b])$, nous vérifions que $T_K(S)$ est uniformément borné et équicontinu.

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|u_n\|_p \leq M$, M est une constante positive, on peut facilement vérifier que

$$|T_K u_n(t)| \leq \|K\|_\infty (b-a)^{\frac{1}{p}} \left(CM^{p-1} + \|h\|_q\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [a,b].$$

Donc, $T_K(S)$ est uniformément borné dans $C([a,b])$.

En outre, il est facile de vérifier que si t, $t_0 \in [a,b]$, puis $\forall n \in \mathbb{N}$, on obtient

$$|T_K u_n(t) - T_K u_n(t_0)| \leq \sup_{s\in[a,b]} |K(t,s) - K(t_0,s)| (b-a)^{\frac{1}{p}} \left(C\left(\|u\|_p\right)^{p-1} + \|h\|_q\right).$$

Cela montre que $T_K(S)$ est équicontinu.

En utilisant le théorème d'Arzela-Ascoli, on obtient $T_K(S)$ est compact dans $C([a,b])$, pour la topologie de $L^P([a,b])$ est plus faible que la topologie de $C([a,b])$, alors $T_K(S)$ est compact dans $L^P([a,b])$.

Deuxième étape

Nous montrons que T_K est compact dans le cas général où $K \in L^p\left([a,b]^2\right)$. Notez que dans ce cas, il existe une suite de noyau $(K_n(t,s))_n \in C\left([a,b]^2\right)$, telle que $\|K_n - K\|_p \longrightarrow 0$ que $n \longrightarrow +\infty$.

Soit S un ensemble défini précédent et borné de $L^p([a,b])$, comme $K_1(\cdot,\cdot) \in C\left([a,b]^2\right)$, en utilisant la première étape, on conclut que T_{K_1}est compact. Ainsi, il existe $(u_n^{(1)})_n$ une suite de $(u_n)_n$ tel que $\left(T_{K_1}(u_n^{(1)})_n\right)_n$ est convergente. De même, il existe $(u_n^{(2)})_n$ une suite de $(u_n^{(1)})_n$ tel que $\left(T_{K_2}(u_n^{(2)})_n\right)_n$ est convergente; plus généralement, $\forall m \in \mathbb{N}$, il existe une suite $(u_n^{(m)})_n$de $(u_n^{(m-1)})_n$ tel que$\left(T_{K_m}(u_n^{(m)})_n\right)_n$ est convergente.

Ensuite, on envisage la suite diagonale $(u_n^{(n)})_n$, nous prouvons que $\left(T_K(u_n^{(n)})_n\right)_n$ est une suite de Cauchy dans $L^P([a,b])$, nous notons d'abord que $\forall k,l,n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left\|T_K(u_k^{(k)}) - T_K(u_l^{(l)})\right\|_p \leq \left\|T_K(u_k^{(k)}) - T_{K_n}(u_k^{(k)})\right\|_p + \left\|T_{K_n}(u_k^{(k)}) - T_{K_n}(u_l^{(l)})\right\|_p + \left\|T_{K_n}(u_l^{(l)}) - T_K(u_l^{(l)})\right\|_p . \tag{3.1.6}$$

On a $\left(T_{K_n}(u_l^{(l)})\right)_l$ convergente, alors $\forall \varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ telle que

$$\left\|T_{K_n}(u_k^{(k)}) - T_{K_n}(u_l^{(l)})\right\|_p < \frac{\varepsilon}{3}, \forall l,k \geq N_\varepsilon. \tag{3.1.7}$$

D'autre part, on obtient

$$\left\|T_K(u_k^{(k)}) - T_{K_n}(u_k^{(k)})\right\|_p^p \leq \int_a^b \left[\int_a^b |K_n(t,s) - K(t,s)| \left|f(s,u_k^{(k)}(s))\right| ds\right]^p dt$$

$$\leq \|K - K_n\|_p^p C\left(\left\|u_k^{(k)}\right\|_p^{p-1} + \|h\|_q\right)^p .$$

Comme $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k^{(k)} \in S$, alors l'inégalité précédente implique;

$$\left\|T_K(u_k^{(k)}) - T_{K_n}(u_k^{(k)})\right\|_p \leq \|K - K_n\|_p \left(CM^{p-1} + \|h\|_q\right). \tag{3.1.8}$$

On a $\|K - K_n\|_p \longrightarrow 0$, que $n \longrightarrow +\infty$, puis en utilisant l'inégalité précédente, on conclut qu'il existe $M_\varepsilon \in \mathbb{N}$, telle que

$$\left\|T_K(u_k^{(k)}) - T_{K_n}(u_k^{(k)})\right\|_p \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall n \geq M_\varepsilon, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

En combinant (3.1.7)-(3.1.8), on conclut que $\left(T_k(u_n^{(n)})_n\right)_n$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach $L^p([a,b])$. Par conséquent, toute suite bornée de $T_K(S)$ est une suite convergente, alors $T_K(S)$ est compact, pour tout S un sous-ensemble borné de $L^p([a,b])$.

Cela montre que T_K est un opérateur compact sur $L^p([a,b])$. ∎

3.2 Résultats d'existence des solutions des équations de Hammerstein

Notre résultat d'existence du premier problème (3.1.1) est donné par le théorème suivant.

Théorème 3.2.1

On considère l'équation intégrale non linéaire (3.1.1), et soit $1 \leq p \leq 2$ un nombre réel et $q \in [1, +\infty]$ le conjugué de p.

Supposons que $K(\cdot,\cdot) \in L^p\left([a,b]^2\right)$ et $g(\cdot) \in L^p([a,b])$. En outre, supposons que la fonction $f(\cdot,\cdot)$ satisfait aux conditions du Lemme 3.1.1. Ensuite, les résultats suivants détiennent

(R_1) Si $1 \leq p < 2$, alors (3.1.1) admet une solution $\varphi \in L^p([a,b])$.

(R_2) Si $p = 2$, et le noyau K satisfait à l'une des deux conditions suivantes :

(c_1) $C\|K\|_2 < 1$, où C constante est donnée par le Lemme 3.1.1.

(c_2) $K(t,s) = 0$, $\forall s \geq t$ et $|K(t,s)| \leq |K_1(t)|\,|K_2(s)|$, où $K_1(\cdot)$ est borné et mesurable sur $[a,b]$ et $K_2(\cdot) \in L^p([a,b])$.

Alors, l'équation (3.1.1) admet une solution $\varphi \in L^p([a,b])$.

Preuve

Notons d'abord que la fonction $f(\cdot,\cdot)$ satisfait aux conditions de Lemme 3.1.1, il vérifie l'inégalité (3.1.5) pour une constante $C > 0$ et $h(\cdot) \in L^q([a,b])$. Ainsi, d'après le théorème 3.1.5, on conclut que l'opérateur T défini par (3.1.3) est un opérateur compact de $L^p([a,b])$ dans $L^p([a,b])$.

La continuité de T dans $L^p([a,b])$ est une simple conséquence de la continuité de l'opérateur F sur $L^p([a,b])$. Plus précisément, soit $\varphi \in L^p([a,b])$ et soit $(\varphi_n)_n$ une suite de $L^p([a,b])$ qui converge vers φ.

Puis, en utilisant les propriétés de F ainsi que l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\|T\varphi_n(\cdot) - T\varphi(\cdot)\|_p^p \leq \int_a^b \left[\int_a^b |K(t,s)|\,|F(\varphi_n)(s) - F(\varphi)(s)|\,ds\right]^p dt$$

$$\leq \int_a^b \left[\int_a^b |K(t,s)|^p\,ds\right]\left[\int_a^b |F(\varphi_n)(s) - F(\varphi)(s)|^q\right]^{\frac{p}{q}} dt$$

$$\leq \|F(\varphi_n) - F(\varphi)\|_q^p \|K\|_P^P.$$

Comme $F : L^p([a,b]) \longrightarrow L^q([a,b])$ est continu, alors l'inégalité précédente implique la continuité de T. Puisque T est compact, alors T est complètement continu.

Si $\varphi \in L^p([a,b])$, en utilisant l'inégalité (3.1.5) avec l'inégalité de Hölder, on peut facilement vérifier que

$$\|T\varphi\|_p \leq \|g\|_p + \|K\|_p\left(C\left(\|\varphi\|_p\right)^{p-1} + \|h\|_q\right). \tag{3.2.1}$$

Pour prouver le résultat d'existence (R_1), on utilise le théorème du point fixe de Schaefer et démontre que pour $1 \leq p < 2$, l'ensemble

$$S = \{\varphi \in L^p([a,b])\,;\, \varphi = \lambda T\varphi,\ \lambda \in]0,1[\},$$

est borné. En utilisant (3.2.1), il est facile de voir que $\forall\varphi \in S$, on obtient

$$\|\varphi\|_p \leq \|T\varphi\|_p \leq C\|K\|_p\left(\|\varphi\|_p\right)^{p-1} + \|g\|_p + \|K\|_p\|h\|_q,$$

ou bien

$$\left(\|\varphi\|_p\right)^{p-1}\left[\left(\|\varphi\|_p\right)^{2-p} - C\|K\|_p\right] \leq \|g\|_p + \|K\|_p\|h\|_q.$$

Comme$1 \leq p < 2$, alors l'inégalité précédente implique qu'il existe une constante $M > 0$ telle que $\|\varphi\|_p \leq M$. Ainsi, S est uniformément borné par M.

Par conséquent, en utilisant le théorème de Schaefer, on conclut que l'équation (3.1.1) admet une solution $\varphi \in L^p([a,b])$.

Ensuite, nous prouvons (R_2), on examine d'abord le cas particulier (c_1). Comme $\varphi \in S$, puis de (3.2.1), on obtient

$$\|\varphi\|_2 \leq \|T\varphi\|_2 \leq \|g\|_2 + \|K\|_2 \left(C \|\varphi\|_2 + \|h\|_2\right).$$

Si $C \|K\|_2 < 1$, alors l'inégalité précédente implique que $\forall \varphi \in S$, on déduit

$$\|\varphi\|_2 \leq \frac{\|g\|_2 + \|K\|_2 \|h\|_2}{1 - C \|K\|_2} = M.$$

Ainsi, S est borné. Par conséquent, si $C \|K\|_2 < 1$, alors l'équation (3.1.1) vérifie le théorème du point fixe de Schaefer d'où elle admet une solution $\varphi \in L^p([a,b])$.

Enfin, sous la condition (c_2), toute solution de $\varphi = \lambda T\varphi$ pour $\lambda \in [0,1]$ satisfait les inégalites suivantes

$$|\varphi(t)| \leq \|g\|_\infty + |K_1(t)| \int_a^t |K_2(s)| |h(s)| \, ds + C |K_1(t)| \int_a^t |K_2(s)| |\varphi(s)| \, ds, \quad t \in [a,b]$$

$$\leq \|g\|_\infty + \|K_1\|_\infty \|K_2\|_2 \|h\|_2 + C \|K_1\|_\infty \int_a^t |K_2(s)| |\varphi(s)| \, ds$$

$$\leq A + \int_a^t \phi(s) |\varphi(s)| \, ds,$$

où $A = \|g\|_\infty + \|K_1\|_\infty \|K_2\|_2 \|h\|_2$ et $\phi(s) = C \|K_1\|_\infty |K_2(s)| \in L^2([a,b]) \subset L^1([a,b])$. Ainsi, en utilisant l'inégalité de Gronwall, on conclut que φ satisfait la relation suivante

$$\|\varphi\|_2 \leq A\sqrt{b-a} \exp\left(\|\phi\|_1\right).$$

Par conséquent, l'équation (3.1.1) admet une solution dans $L^2([a,b])$ par le théorème du point fixe de Schaefer. ■

Notons que le résultat du théorème ci-dessus n'est valable que dans le cas où $1 \leq p \leq 2$. En outre, si $p = 2$, alors la condition (c_1) est une sérieuse limitation du théorème 3.1.5. Pour surmontrer ces problèmes, on peut utiliser une pratique pondérée L^p-norme et le théorème du point fixe de Schauder. C'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 3.2.2

Considérons l'équation (3.1.1) où les fonctions $g(t)$, $f(s,x)$ sont aussi proposées par le théorème précédent, et soit $p \geq 1$ un nombre réel et q le conjugué de p.

Supposons également qu'il existe une constante $C_1 > 0$ et $h \in L^p([a,b])$ telle que

$$|f(s,x)| \leq C_1 |x| + |h(s)|, \quad p \cdot p \cdot s \in [a,b], \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.2.2}$$

En outre, supposons qu'il existe fonction μ, continue, bornée, non nulle, positive sur $[a,b]$, et telle que la fonction

$$\Psi(t) = \begin{cases} \left[\int\limits_a^b |K(t,s)|^q (\mu(s))^{-\frac{q}{p}} ds\right]^{\frac{1}{q}}, \text{ si } p > 1,\ q < +\infty, \\ \sup\limits_{s\in[a,b]} \dfrac{|K(t,s)|}{\mu(s)}, \qquad \text{si } p = 1,\ q = +\infty. \end{cases}$$

appartient à $L^p([a,b],\ d\mu)$.

$$\text{Si } \ C_1 \|\Psi\|_{p,\mu} < 1,$$

alors, l'équation (3.1.1) admet une solution $\varphi \in L^p([a,b])$.

Preuve

Nous définissions d'abord l'espace $X = L^p([a,b],\ d\mu)$, par

$$L^p([a,b],\ d\mu) = \left\{ f \in L^p([a,b]),\ \|f\|_{p,\mu} < +\infty \right\}.$$

Telle que, $\|\cdot\|_{p,\mu}$ est une fonction réelle positive définie sur $L^p([a,b])$ par

$$\forall f \in L^p([a,b]), \quad \|f\|_{p,\mu} = \left(\int\limits_a^b |f(t)|^p \mu(t)\, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

En utilisant les propriétés de la fonction μ, il est clair que $\|\cdot\|_{p,\mu}$ est une norme et que $X = L^p([a,b],\ d\mu)$ est un espace de Banach. Deplus les deux normes $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_{p,\mu}$ sont équivalentes. Ainsi, tout ensemble borné dans X est un ensemlble borné dans $L^p([a,b])$.

Ensuite, soit R un nombre réel positif qui sera fixé, supposons B_R est un sous- ensemble borné, fermé, convexe d'un espace X, défini par

$$B_R = \left\{ f \in X, \quad \|f\|_{p,\mu} \leq R \right\}.$$

Comme l'opérateur intégral T donné par (3.1.3) est compact sur $L^p([a,b])$ et B_R est un ensemble borné de $L^p([a,b])$, alors $T(B_R)$ est relativement compact dans $L^p([a,b]) \subseteq X$. Ensuite, nous montrons que si $C_1 \|\Psi\|_{p,\mu} < 1$, alors il existe $R_0 > 0$ tel que $\forall R \geq R_0$, on obtient $T(B_R) \subseteq B_R$. Cela se fait comme suit. Soit $\varphi \in B_R$, en utilisant l'inègalitè de Hölder, (3.2.2) et le théorème de Fubini, on obtient les inégalités suivantes.

$$\|T_K\varphi\|_{p,\mu}^p \leq \int_a^b \mu(t) \left[\int_a^b \frac{|K(t,s)|}{(\mu(s))^{\frac{1}{p}}} (\mu(s))^{\frac{1}{p}} (C_1 |\varphi(s)| + |h(s)|)\, ds \right]^p dt$$

$$\leq \int_a^b \mu(t) \left(\int_a^b |K(t,s)|^q (\mu(s))^{\frac{-q}{p}} ds \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_a^b \mu(s) (C_1 |\varphi(s)| + |h(s)|)^p ds \right) dt$$

$$\leq \|C_1\varphi + h\|_{p,\mu}^p \int_a^b \mu(t) \left(\int_a^b |K(t,s)|^q (\mu(s))^{\frac{-q}{p}} ds \right)^{\frac{p}{q}} dt$$

$$\leq \left(C_1 \|\varphi\|_{p,\mu} + \|h\|_{p,\mu} \right)^p \|\Psi\|_{p,\mu}^p$$

Comme $T\varphi = g + T_K\varphi$, et $\|\varphi\|_{p,\mu} \leq R$, alors l'inégalité

$$\|T\varphi\|_{p,\mu} \leq \|g\|_{p,\mu} + \|\Psi\|_{p,\mu} \|h\|_{p,\mu} + C_1 \|\varphi\|_{p,\mu} \|\Psi\|_{p,\mu}.$$

Par conséquent, $T(B_R) \subseteq B_R$, pour tout

$$R \geq \frac{\|g\|_{p,\mu} + \|\Psi\|_{p,\mu} \|h\|_{p,\mu}}{1 - C_1 \|\Psi\|_{p,\mu}} = R_0.$$

Enfin, en utilisant le théorème du point fixe de Schauder, on conclut que (3.1.1) admet une solution $\varphi \in L^p([a,b])$. ■

Nous allons donner un exemple.

Exemple 3.2.1

On considère l'équation intégrale non linéaire suivante

$$\varphi(t) = g(t) + \lambda \int_0^1 \frac{\exp(5(s-t))}{5\sqrt{t+s}} \left[\varphi(s) + \ln\left(1+\varphi^2(s)\right)\right] ds, \; t \in [0,1], \tag{3.2.3}$$

où $g \in L^2([0,1])$ et $\lambda > 0$ est un paramètre réel.

Le noyau $K(\cdot,\cdot)$ appartient à $L^2([0,1]^2)$,

$$K(t,s) = \lambda \frac{\exp(5(s-t))}{5\sqrt{t+s}} \in L^2([0,1]^2).$$

En outre, le calcul numérique nous donne $\|K\|_2 \approx 3.0030\lambda$.

D'autre part, la fonction $f(s,x) = x + \ln(1+x^2)$ satisfait clairement la condition de L^2-Carathéodory.

Comme

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(s,x)}{x} = 1, \; \forall s \in [0,1],$$

alors, $\forall \varepsilon > 0$, il existe $1 < C_{1,\varepsilon} < 1+\varepsilon$, $C_{2,\varepsilon} > 0$ telle que

$$|f(s,x)| \leq C_{1,\varepsilon}|x| + C_{2,\varepsilon}, \; \forall x \in \mathbb{R}, \; s \in [0,1].$$

Notons que la $|f(s,x)| > x, \; \forall x > 0$. Par conséquent, il est nécessaire que $C_{1,\varepsilon} > 1$.

En utilisant l'inégalité précédente et le théorème 3.2.1, on conclut que (3.2.3) admet une solution dans $L^2([0,1])$, pour tout $0 \leq \lambda < \lambda_0 \approx 0.3330$.

Si $\lambda > \lambda_0$, le théorème 3.2.1, n'est plus applicable, nous utilisons le théorème 3.2.2 pour prouver le résultat d'existence pour les grandes valeurs de λ, pour $p = q = 2$ on considère une mesure pondérée de Lebsgue sur $[0,1]$, $d\mu(t) = \mu(t)\,dt$, où $\mu(t) = \exp(10t)$.

En vertu du théorème 3.2.2 la fonction $\Psi(t)$ est donnée par la formule suivante,

$$\Psi(t) = \left(\int_0^1 \frac{|K(t,s)|^2}{\mu(s)} ds\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\lambda}{5} e^{-5t} \sqrt{\ln\left(\frac{t+1}{t}\right)}.$$

Notez que $\Psi \in L^2([0,1], d\mu)$ et $\|\Psi\|_{2,\mu} = \frac{\lambda}{5}\sqrt{2\ln 2}$.

Puisque la constante $C_{1,\varepsilon}$ satisfait $1 < C_{1,\varepsilon} < 1+\varepsilon$, $\forall\varepsilon > 0$, en utilisant le théorème 3.2.2 , on conclut que l'équation (3.2.3) admet une solution dans $L^2\left([0,1]\right)$, pour tout

$$0 \leq \lambda < \lambda_1 = \frac{5}{\sqrt{2\ln 2}} \approx 4.2466.$$

Il s'agit d'une amélioration significative du résultat donné par le théorème 3.2.1.

Dans cette section, nous donnons un résultat d'existence et unicité pour une solution continue de l'équation intégrale non linéaire de Hammerstein-Volterra.

3.3 Existence et unicité de la solution continue de l'équation de Hammerstein-Volterra

3.3.1 Théorème d'existence

Notre résultat d'existence est donné par le théorème suivant.

Théorème 3.3.1

Considérons l'équation intégrale non linéaire de Hammerstein-Volterra suivante

$$\varphi\left(t\right) = T\varphi = g\left(t\right) + \int_a^t K\left(t,s\right) f\left(s,\varphi\left(s\right)\right) ds, \quad t \in [a,b]\,. \tag{3.3.1}$$

Supposons que $g \in C\left([a,b]\right)$, et le noyau K satisfait les conditions suivantes,

(i) $K\left(t,s\right) \geq 0,\ \ \forall t,s \in [a,b]\,,\ K\left(t,s\right) \geq K\left(t_0,s\right),\ \ \forall t \leq t_0;$

(ii) La fonction $t \longrightarrow \int_a^t K\left(t,s\right) ds$, est continue sur $[a,b]$;

(iii) $\forall t_0 \in [a,b],\ \ s \longrightarrow K\left(t_0,s\right) \in L^1\left([a,b]\right).$

On suppose que la fonction $f\left(\cdot,\cdot\right)$ est continue sur $[a,b]\times\mathbb{R}$ et satisfait la condition suivante,

$$\left|f\left(s,x\right)\right| \leq c_1\left|x\right| + c_2,\ \ \forall x \in \mathbb{R}, \tag{3.3.2}$$

où c_1, c_2 sont deux constantes positives.

En outre, supposons que le noyau K satisfait la condition suivante,

$$\sup_{t\in[a,b]} \int_a^t K(t,s)\,ds < \frac{1}{c_1}. \tag{3.3.3}$$

Alors, l'équation (3.3.1) admet au moins une solution $\varphi \in C([a,b])$.

Preuve

Nous allons prouver que l'opérateur T est complètement continu de $C([a,b])$ dans $C([a,b])$. Pour prouver que $T(C([a,b])) \subset C([a,b])$, nous procédons comme suit.

Soit $\varphi \in C([a,b])$ et t, $t_0 \in [a,b]$, on peut supposer que $t < t_0$. Puis, utilissons (i), on obtient

$$|T\varphi(t) - T\varphi(t_0)| \leq |g(t) - g(t_0)| + \int_a^t (K(t,s) - K(t_0,s))\,|f(s,\varphi(s))|\,ds + \int_t^{t_0} K(t_0,s)\,|f(s,\varphi(s))|\,ds \tag{3.3.4}$$

$$0 \leq \int_a^t (K(t,s) - K(t_0,s))\,ds \leq \left| \int_a^t K(t,s)\,ds - \int_a^{t_0} K(t_0,s)\,ds \right| + \int_t^{t_0} K(t_0,s)\,ds, \tag{3.3.5}$$

de (ii), (iii) et (3.3.5), on conclut que

$$\lim_{t\to t_0} \int_t^{t_0} K(t_0,s)\,ds = \lim_{t\to t_0} \int_a^t (K(t,s) - K(t_0,s))\,ds = 0. \tag{3.3.6}$$

Puisque φ est bornée sur $[a,b]$, et $f(\cdot,\cdot)$ satisfait (3.3.2), alors il existe une constante $M > 0$ telle que

$$|f(s,\varphi(s))| \leq M, \quad \forall s \in [a,b]. \tag{3.3.7}$$

En combinant (3.3.4), (3.3.6) et (3.3.7), on conclut que $T\varphi \in C([a,b])$.

Note également que la continuité de T sur $C([a,b])$ est une conséquence directe de (ii) et la continuité de $f(\cdot,\cdot)$ sur $[a,b] \times \mathbb{R}$.

Ensuite, pour prouver la compacité de T, il suffit de vérifier que T satisfait la condition de théorème d'Ascoli-Arzela.

Soit $S = \{\varphi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ un ensemble borné de $C([a,b])$ avec une constante C_S. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\|T\varphi_n\|_\infty \leq \|g\|_\infty + (c_1 C_S + c_2) \sup_{t\in[a,b]} \int_a^t K(t,s)\,ds = M_S.$$

D'où $T(S)$ est uniformément borné.

Remplaçans φ par φ_n dans (3.3.4), en utilisant (3.3.6) et (3.3.7), on montre que $T(S)$ est équicontinu. Ainsi, que le théorème d' Arzela-Ascoli, on conclut que $T : C([a,b]) \longrightarrow C([a,b])$ est complètement continu.

Ensuite, soit $R > 0$ un nombre réel positif, on considère B_R est une boule convexe et fermée de $C([a,b])$, notée par

$$B_R = \{\varphi \in C([a,b]),\quad \|\varphi\|_\infty \leq R\}.$$

En utilisant (3.3.2), on obtient l'inégalité suivante

$$\|T\varphi\|_\infty \leq \|g\|_\infty + (c_1 R + c_2) \sup_{t\in[a,b]} \int_a^t K(t,s)\,ds.$$

Par conséquent, si $\sup_{t\in[a,b]} \int_a^t K(t,s)\,ds < \dfrac{1}{c_1}$, d'où $T(B_R) \subseteq B_R$, telle que

$$R \geq \frac{\|g\|_\infty + c_2 \sup_{t\in[a,b]} \int_a^t K(t,s)\,ds}{1 - c_1 \sup_{t\in[a,b]} \int_a^t K(t,s)\,ds} = R_0.$$

En utilisant le théorème du point fixe de Schauder, on conclut que l'équation (3.3.1) admet une solution continue sur $[a,b]$. $\blacksquare$

Remarque 3.3.1

Supposons que dans le théorème précédent, la fonction $f(\cdot,\cdot)$ satisfait l'inégalité suivante

$$|f(s,x)| \leq c_1 |x|^\eta + c_2,\ \forall x \in \mathbb{R}, \forall s \in [a,b], \tag{3.3.8}$$

où $0 \leq \eta < 1$ et $c_1, c_2 > 0$. Alors, il existe $c_1^{'}, c_2^{'} > 0$ telle que

$$|f(s,x)| \leq c_1^{'} |x| + c_2^{'}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \forall s \in [a,b],$$

et telle que $\sup\limits_{t\in[a,b]} \int\limits_a^t K(t,s)\,ds < \frac{1}{c_1^{'}}$. Ainsi, par le théorème précédent, on conclut que si et seulement si $f(\cdot,\cdot)$ satisfait (3.3.8), puis l'équation (3.3.1) admet une solution $\varphi \in C([a,b])$.

Remarque 3.3.2

Comme La fonction $t \longrightarrow \int\limits_a^t K(t,s)\,ds$ est continue, alors la condition (3.3.3) est satisfaite pour $b-a$ assez petit. Par conséquent, le théorème précédent assure toujours l'existence d'une solution de (3.3.1) dans un voisinage de a.

Exemple 3.3.1 ***(équation intégrale non linéaire d'Abel)***

On considère l'équation intégrale non linéaire d'Abel de seconde espèce

$$\varphi(t) = g(t) + \int\limits_0^t \frac{1}{(t-s)^{\alpha}} (\varphi(s))^{\eta}\,ds, \quad t \in [0,T] \text{ et } T < +\infty, \tag{3.3.9}$$

où $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq \eta \leq 1$ et $g \in C([0,T])$.

Il est clair que le noyau

$$K(t,s) = \frac{1}{(t-s)^{\alpha}} \chi_{[0,t[}(s),$$

vérifié les conditions (i) et (iii) du théorème 3.3.1.

La fonction $H(t)$ telle que

$$H(t) = \int\limits_0^t K(t,s)\,ds = \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

est continue sur $[0,T]$.

Si $\eta < 1$, en utilisant le théorème précédent et la remarque 3.3.1 , on conclut que l'équation (3.3.9) admet une solution continue sur $[0,T]$, pour tout nombre réel $T > 0$.

Enfin, si $\eta = 1$, alors le théorème précédent assure l'existence d'une solution continue de (3.3.9) sur $[0,T]$ pour tout nombre réel positif $T < (1-\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

3.3.2 L'unicité de la solution

L'unicité de la solution de (3.3.1) est donnée par la proposition suivante

Proposition 3.3.1

Supposons que la fonction $f(\cdot,\cdot)$ proposée par le théorème précédent satisfait la condition suivante,

$$|f(s,x) - f(s,y)| \leq L|x-y|^r,\ \forall x, y \in \mathbb{R},$$

pour des constantes $L > 0$ et $0 < r \leq 1$. Alors, dans les conditions du théorème précédent, l'équation (3.3.1) admet une solution unique et continue sur $[a,b]$.

Preuve

Soit M_K une constante positive donnée par

$$M_K = \sup_{t\in[a,b]} \int_a^t K(t,s)\, ds.$$

Par contradiction, supposons que l'équation (3.3.1) admet deux solutions différentes φ, $\psi \in C([a,b])$, alors il existe $0 \leq \varepsilon < 1$ telle que $\|\varphi - \psi\|_\infty \geq \varepsilon$, il est clair que $\forall t \in [a,b]$, on obtient

$$|T\varphi(t) - T\psi(t)| \leq L\int_a^t K(t,s)|\varphi(s) - \psi(s)|^r ds \leq (\|\varphi-\psi\|_\infty)^r LM_K(t-a).$$

En utilisant l'inégalité précédente, on obtient

$$\left|T^2\varphi(t) - T^2\psi(t)\right| \leq L\int_a^t K(t,s)|T\varphi(s) - T\psi(s)|^r ds$$

$$\leq (\|\varphi-\psi\|_\infty)^{r^2} (LM_K)^{r+1} \int_a^t (s-a)^r ds$$

$$\leq (\|\varphi-\psi\|_\infty)^{r^2} (LM_K)^{r+1} \frac{(t-a)^{r+1}}{r+1}.$$

De même, on obtient

$$\left|T^3\varphi(t) - T^3\psi(t)\right| \leq \left(\|\varphi-\psi\|_\infty\right)^{r^3} (LM_K)^{r^2+r+1} \frac{(t-a)^{r^2+r+1}}{(r+1)(r^2+r+1)}.$$

Plus généralement, pour tout n entier positif, on obtient

$$|T^n\varphi(t) - T^n\psi(t)| \leq \left(\|\varphi-\psi\|_\infty\right)^{r^n} (LM_K)^{r^{n-1}+...+r+1} \frac{(t-a)^{r^{n-1}+...+r+1}}{(r+1)(r^2+r+1)...(r^{n-1}+...+r+1)}.$$

Par conséquent,

$$\|T^n\varphi - T^n\psi\|_\infty \leq \left(\|\varphi-\psi\|_\infty\right)^{r^n} \frac{(LM_K(b-a))^{r^{n-1}+...+r+1}}{(r+1)(r^2+r+1)...(r^{n-1}+...+r+1)}.$$

$$\leq \|\varphi-\psi\|_\infty \frac{\|\varphi-\psi\|_\infty^{r^n-1} (LM_K(b-a))^{r^{n-1}+...+r+1}}{(r+1)(r^2+r+1)...(r^{n-1}+...+r+1)}.$$

Puisque $0 < r \leq 1$ et que $\|\varphi-\psi\|_\infty \geq \varepsilon$, pour certain $0 < \varepsilon < 1$, alors l'inégalité précédente implique

$$\|T^n\varphi - T^n\psi\|_\infty \leq \|\varphi-\psi\|_\infty \frac{\max\left(1, (LM_K(b-a))^{\frac{1}{1-r}}\right)}{\varepsilon(r+1)(r^2+r+1)...(r^{n-1}+...+r+1)}.$$

Comme $\varepsilon \prod_{j=1}^{n-1} (r^j+...+r+1) \longrightarrow +\infty$ que $n \longrightarrow +\infty$, alors il existe $N_0 \in \mathbb{N}$, tel que

$$\frac{\max\left(1, (LM_K(b-a))^{\frac{1}{1-r}}\right)}{\varepsilon(r+1)(r^2+r+1)...(r^{n-1}+...+r+1)} < 1, \quad \forall n \geq N_0,$$

alors, on conclut que

$$\|T^n\varphi - T^n\psi\|_\infty < \|\varphi-\psi\|_\infty, \quad \forall n \geq N_0. \tag{3.3.10}$$

D'autre part, puisque φ, ψ sont deux solutions de (3.3.1) et des points fixes de T alors, ils sont des points fixes de T^n, $\forall n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, φ, ψ satisfont l'égalité suivante,

$$\|T^n\varphi - T^n\psi\|_\infty = \|\varphi-\psi\|_\infty.$$

Ce qui contredit (3.3.10), on conclut que (3.3.1) admet une solution unique. ■

Chapitre 4

APPLICATION DU ALTERNATIVE NON LINÉAIRE

Dans ce chapitre nous démontrons l'existence de la solution à une équation intégrale non linéaire la modélisation de l'infiltration de fluide dans un milieu poreux homogène et istrope à moyen terme.

4.1 INTRODUCTION

4.1.1 Position du problème

Prenons la théorie mathématique de l'infiltration de fluide à partir d'un résevoir cylindrique dans un milieu poreux homogène et istrope.

On considère l'équation intégrale suivante

$$\varphi^2(t) = f(t) + \int_0^t K(t-s)\,\varphi(s)\,ds,\ \ t \in \mathbb{R}_+, \tag{4.1.1}$$

où K et f sont des fonctions connues dependent de paramètres physiques.

La fonction φ inconnue désigne l'hauteur de fluide dessus de la base horizontale, multipliée par un facteur positif.

C'est la raison pour pourquoi, du point de vue physique, les solutions non négatives de (4.1.1) sont les plus intèret.

Pour montrer les résultats d'existence des solutions de l'équation (4.1.1), on va appliquer l'alternative non linéaire de Leary-Schauder.

4.1.2 Alternative non linéaire de Leray-Schauder

Théorème 4.1.1

Soit Ω un ouvert, borné d'un ensemble convexe S dans espace de Banach et $A : \overline{\Omega} \longrightarrow S$ un opérateur compact et supposons que $0 \in \Omega$.

Alors, on a l'alternative suivante

(i) Ou bien A admet un point fixe dans $\overline{\Omega}$,

(ii) Ou bien il existe $x \in \partial\Omega$, $\exists\lambda \in [0, 1]$ telle que $x = \lambda Ax$.

Preuve

Pour la preuve voir [11].

4.2 RÉSULTATS D'EXISTENCE

Théorème 4.2.1

Supposons que $K \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ est croissante et que la fonction $f \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ est croissante avec $f(0) = 0$.

Alors, l'équation (4.1.1) admet une solution $\varphi(t)$ sur $\mathbb{R}_+$ avec $\varphi(t) \geq 0$ pour $t \in \mathbb{R}_+$.

Preuve

On considère l'équation intégro-différentielle suivante

$$x'(t) = f'(t) + K(0)\,\omega(x(t)) + \int_0^t K'(t-s)\,\omega(x(s))ds, \; t > 0, \tag{4.2.1}$$

avec la condition initiale

$$x(0) = 0, \tag{4.2.2}$$

où $\omega \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ est la fonction

$$\omega(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, \text{ si } x \geq 0, \\ 0, \quad \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Nous allons établir des estimations à priori, indépendante de λ, pour les solutions de la famille des problèmes $(0 \leq \lambda \leq 1)$

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda \left[f'(t) + K(0)\,\omega(x(t)) + \int\limits_0^t K'(t-s)\,\omega(x(s))\,ds \right], \\ x(0) = 0. \end{cases} \tag{4.2.3}$$

considérées sur l'intervale $[0,1]$.

Soit $D^+ f$ désigne la dérivée de Dini supérieure droite de la fonction f.

On pose $y(t) = \sqrt{|x(t)|}$; $t \in [0,1]$, telle que $x(t)$ est une solution à (4.2.3) sur $[0,1]$.

Nous ont suite que

$$\left(D^+ y^2\right)(t) = \lim_{h \longrightarrow 0^+} \sup \frac{y^2(t+h) - y^2(t)}{h} \leq \left| x'(t) \right|, 0 < t < 1,$$

car

$$\frac{y^2(t+h) - y^2(t)}{h} = \frac{|x(t+h)| - |x(t)|}{h} \leq \frac{|x(t+h) - x(t)|}{h}, \ 0 < t < 1.$$

Tenant compte de (4.2.3), nous obtenons

$$\left(D^+ y^2\right)(t) \leq f'(t) + K(0)\,y(t) + \int\limits_0^t K'(t-s)\,y(s)\,ds, \ 0 < t < 1.$$

Maintenant on désigne

$$\theta(t) = f(t) + K(0) \int\limits_0^t y(s)\,ds + \int\limits_0^t \left\{ \int\limits_0^s K'(s-\tau)\,y(\tau)\,d\tau \right\} ds, \ 0 \leq t \leq 1.$$

D'où on obtient

$$\left(D^+ y^2\right)(t) \leq \theta'(t), \ 0 < t < 1,$$

donc

$$\left(D^{+}\left(y^{2}-\theta\right)\right)(t) \leq 0,\ 0<t<1.$$

Nous déduisons de cette inégalité par la continuité que la fonction $(y^2-\theta)$ est décroissante.

Ainsi,

$$y^{2}(t)-\theta(t) \leq y^{2}(0)-\theta(0)=0, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

qui est,

$$y^{2}(t) \leq f(t)+K(0) \int_{0}^{t} y(s)\, ds+\int_{0}^{t}\left\{\int_{0}^{s} K^{'}(s-\tau)\, y(\tau)\, d\tau\right\} ds, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

On définie

$$V(t)=1+f(1)+K(0) \int_{0}^{t} y(s)\, ds+\int_{0}^{t}\left\{\int_{0}^{s} K^{'}(s-\tau)\, y(\tau)\, d\tau\right\} ds, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Nous avons ensuite que $1 \leq V(t)$ et $y^2(t) \leq V(t)$ sur $[0,1]$.

Notez que

$$V^{'}(t)=K(0)\, y(t)+\int_{0}^{t} K^{'}(t-s)\, y(s)\, ds,\ 0 \leq t \leq 1,$$

ainsi

$$V^{'}(t) \leq K(0) \sqrt{V(t)}+\int_{0}^{t} K^{'}(t-s) \sqrt{V(s)} ds,\ 0 \leq t \leq 1,$$

puisque $V(t) \geq 1$ sur $[0,1]$ est croissante, on obtient que

$$\frac{V^{'}(t)}{2 \sqrt{V(t)}} \leq \frac{1}{2} K(0)+\frac{1}{2} \int_{0}^{t} K^{'}(t-s)\, ds=\frac{1}{2} K(t),\ 0 \leq t \leq 1.$$

Notez que

$$\sqrt{V(0)} \leq 1 + f(1)$$

par intégration on obtient

$$\sqrt{V(t)} \leq 1 + f(1) + \frac{1}{2}\int_0^t K(s)\,ds.$$

Comme $y^2(t) \leq V(t)$ sur $[0,1]$, donc

$$\sqrt{|x(t)|} \leq 1 + f(1) + \frac{1}{2}\int_0^t K(s)\,ds. \tag{4.2.4}$$

Posons

$$\sqrt{P} = 1 + f(1) + \frac{1}{2}\int_0^1 K(s)\,ds,\ \ P > 0.$$

Notons $\|v\| = \sup\limits_{0\leq t\leq 1} |v(t)|$ pour $v \in C([0,1])$, et soit X un espace de Banach défini par

$$X = \left\{x \in C^1([0,1])\ :\ x(0) = 0\right\},$$

avec la norme

$$\|x\|_1 = \|x\| + \left\|x'\right\|, \text{ pour tout } x \in X.$$

Notez que l'opérateur linéaire $D : X \longrightarrow C([0,1])$, défini par $Dx = x'$, alors l'opèrateur inverse D^{-1} est borné.

Notons par $F : X \longrightarrow C([0,1])$ l'opérateur

$$Fx(t) = f'(t) + K(0)\,\omega(x(t)) + \int_0^t K'(t-s)\,\omega(x(s))ds, 0 \leq t \leq 1,$$

et défini A :$X \longrightarrow X$ par

$$Ax = D^{-1}Fx, \quad \text{pour tout } x \in X.$$

Il est clair que A est un opérateur compact.

On suppose que Ω l'ensemble ouvert suivante

$$\Omega = \left\{ x \in X : \|x\|_1 < 1 + P + \sup_{0 \leq t \leq 1} \{f^{'}(t)\} + K(1)\sqrt{P} \right\}.$$

Si $x \in X$ vérifié (4.2.3) pour $\lambda \in (0,1)$, alors

$$\left\| x^{'} \right\| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \{f^{'}(t)\} + K(0)\sqrt{P} + \sqrt{P} \int_0^t K^{'}(t-s)\, ds$$

$$\leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \{f^{'}(t)\} + K(1)\sqrt{P}.$$

et

$$\|x\| \leq P$$

D'où

$$\|x\|_1 \leq P + \sup_{0 \leq t \leq 1} \{f^{'}(t)\} + K(1)\sqrt{P}.$$

Alors, qu'il n'ya pas de point $x \in \partial\Omega$ pour tout $\lambda \in (0,1)$, telle que $x = \lambda A x$

On déduit que l'opérateur A admet un point fixe x dans $\overline{\Omega}$, par l'alternative non linéaire.

Alors,

$$x = Ax = D^{-1}Fx.$$

Donc

$$Dx = Fx.$$

D'où

$$x^{'}(t) = f^{'}(t) + K\,(0)\,\omega(x\,(t)) + \int_0^t K^{'}(t-s)\,\omega(x\,(s))ds, 0 \leq t \leq 1$$

Donc $x(t)$ est une solution de le problème $(4.2.1) - (4.2.2)$ sur $[0,1]$.

Comme $x(0) = 0$, nous obtenons de la forme de (4.2.1) que $x(t) \geq 0$ sur $[0, 1]$ afin que, si nous laissons

$$\varphi(t) = \sqrt{x(t)}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

D'après (4.2.1), on obtient

$$2\varphi(t)\varphi^{'}(t) = f^{'}(t) + K(0)\varphi(t) + \int_{0}^{t} K^{'}(t-s)\varphi(s)ds, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

qui est un rendement d'intégration ($\varphi(0) = 0$ et $f(0) = 0$)

$$\varphi^{2}(t) = f(t) + \int_{0}^{t} K(t-s)\varphi(s)\,ds, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Nous avons prouvé que l'équation (4.1.1) admet une solution $\varphi(t)$ sur $[0, 1]$ avec $\varphi(t) \geq 0$ pour tout t dans l'intervalle $[0, 1]$.

Soit

$$x_{1} = \lim_{t \to 1} \varphi^{2}(t) = \varphi^{2}(1).$$

et

$$x(t) = z(t) + x_{1}.$$

Comme avant, nous montrons que l'équation intégro-différentielle suivante

$$z^{'}(t) = f^{'}(t) + \int_{0}^{1} K^{'}(t-s)\varphi(s)ds + K(0)\omega(z(t) + x_{1})$$

$$+ \int_{1}^{t} K^{'}(t-s)\omega(z(s) + x_{1})\,ds, \;\; t \geq 1,$$

avec la condition initiale

$$z(1) = 0$$

admet une solution $z(t)$ sur l'intervalle $[1, 2]$ et que $z(t) \geq 0$ sur $[1, 2]$.

Laissez nous prolonger $\varphi(t)$ sur $[0, 2]$ en laissant

$$\varphi(t) = \sqrt{z(t) + x_1}, \ 0 \leq t \leq 2.$$

D'où $\varphi(t)$ est une solution de l'équation (4.1.1) sur $[0, 2]$.

Poursuivant de la même façon, on obtient une solution de l'équation (4.1.1) sur $\mathbb{R}_+$, qui est non négative sur $\mathbb{R}_+$. ■

CONCLUSION

Dans ce mémoire, on a étudié l'existence et l'unicité des solutions de quelques équations intégrales non-linéaires.

On a commencé par quelques préliminaires sur les espaces fonctionnels et les opérateurs et on a donné la classification des équations integrales, puis on a traité trois théorèmes du point fixe celui de Schauder et Schafer

Après, on a montré l'existence des solutions sur $L^p([a,b])$ de l'équation intégrale non-linéaire de Hammerstein par l'utilisation du théorème de point fixe de Schaefer et Schauder, en mettant des conditions sur le noyau de l'opérateur intégral, comme on a montré l'existence et l'unicité de la solution continue de l'équation intégrale non-linéaire de Hammerstein-Volterra, en utilisant le théorème de point fixe de Schauder, comme on a donné des exemples sur ces équations.

Enfin, nous démontrons l'existence de solutions à une équation intégrale non linéaire la modélisation de l'infiltration de fluide dans un milieu homogène et istrope à moyen terme, en lui appliquer l'alternative non linéaire de Learay-Schauder.

Bibliographie

[1] Abdou M.A. On the solution of linear and nonlinear integral equation, Applied Mathematics and computation 146(2003)857-871.

[2] Abdou M.A, EL-sayed W.G, Deebs E.I. A solution of a nonlinear integral equation, Applied Mathematics and computation 160(2005)1-14.

[3] Agarwal R.P, Meehan M et O'regan D. Fixed point theory and applications, Cambridge tracts in mathematics, 2001.

[4] Boccara H. Analyse fonctionnelle, Editions Marketing, Paris, 1984.

[5] Bratu G. Sur les équations intégrales non linéaires, Bulletin de la S. M. F., tomme 42(1914)113-142..

[6] Brezis H. Analyse fonctionnelle, Théorie et application, Masson, Paris, 1992.

[7] Constantin A. Nonlinear alternative : application to an integral equation, Journal of applied analysis Vol. 5, No. 1(1999), pp. 119-123.

[8] Davis H.T. Intoduction to nonlinear differential and integral equation, New York, 1962.

[9] Djebali S. Le degré topologique : théorie et applications, E.N.S, Kouba, Alger, 2006.

[10] Gagui B. Résolution des équations intégrales par les méthodes adaptatives, Mémoire de magistèr université de M'sila 2006.

[11] Granas A, Dugundji J. Fixed point theory, Springer, Monographs in mathematics, 1985.

[12] Hochstadt H. Integral Equation, New York, 1973.

[13] Karoui A, Jawahdou A. Existence and approximate L^p and continous solutions of non-linear integral equation of the Hammerstein and Volterra types, Appl 216(2010)2077-2091.

[14] Kern M. Problèmes Inverses, Ecole supérieure d'ingénieurs Léonard de Vinci, 2003.

[15] Khirani A. Résolution des équations intégrales non linéaire type Volterra, Mémoire de magistèr université de M'sila 2011.

[16] Kolmogrov A, Fomine S. Elements de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle, Mir. 1977.

[17] Krasnov M, Kissélev A, Makarenko G. Equations intégales, problèmes et exercices, Editions Mir, Moscou, 1977.

[18] Lions J.L. Quelques méthodes de Résolution de Problèmes aux Limites non Linéaires, Dunud, Paris, 1969.

[19] Lovitt W.V. Linear integral equation, New York, 1950.

[20] Mostefai A. Cours de topologie, O.P.U. 1989.

[21] Muskhelshvili N.I. Singular integral equations, Noordhoff, Groningen. The Netherlands, 1953.

[22] Nadir M. Cours d'analyse fonctionnelle, université de M'sila, 2004.

[23] Nadir M. Cours sur les équations intégrales, université de M'sila, 2008.

[24] Trénoguine V, Pissarevski B, Soboleva T. Problèmes et exercices d'analyse fonctionnelle, Editions Mir, Moscou, 1987.

[25] Zeidler E. Nonlinear Functional Analysis and its Aplications. Vol. I : Fixed point Theorems, Springer Verlag, New York, 1986.